

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

**«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМЕНИ М.В.ЛОМОНОСОВА»**

Механико-математический факультет

УТВЕРЖДАЮ

Декан механико-математического  
факультета,

член-корреспондент РАН

А. И. Шафаревич



**Дополнительная профессиональная программа**

(повышение квалификации)

**ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ**

Направление: проект ДОНМ

«Математическая вертикаль»

Авторы курса:

Андрианова Юлия Владимировна,  
старший преподаватель механико-математического  
факультета;

Бегунц Александр Владимирович,  
к. ф.-м. н., доцент механико-математического  
факультета

Москва – 2022 год

## РАЗДЕЛ 1. ХАРАКТЕРИСТИКА ПРОГРАММЫ

### 1.1. Цель реализации программы

Совершенствование профессиональных компетенций слушателей (главным образом, учителей математики, преподающих в 7-9 классах проекта «Математическая вертикаль») в области решения заданий по элементарной теории чисел.

### Совершенствуемые компетенции

№	Компетенция	Направление подготовки 44.03.01 Педагогическое образование
		Бакалавриат
		Код компетенции
1.	Способен осуществлять педагогическую деятельность на основе специальных научных знаний	ОПК – 8

### 1.2. Планируемые результаты обучения

№	Знать – уметь	Направление подготовки 44.03.01 Педагогическое образование
		Бакалавриат
		Код компетенции
1.	<p><b>Знать:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– основные понятия и факты элементарной теории чисел;</li> <li>– основную теорему арифметики и алгоритм разложения на простые множители;</li> <li>– алгоритм Евклида для нахождения НОД (наибольшего общего делителя) натуральных чисел;</li> <li>– алгоритм нахождения НОК (наименьшего общего кратного) натуральных чисел;</li> <li>– алгоритм решения линейного диофантова уравнения с двумя неизвестными;</li> <li>– стратегии и методы решения нелинейных уравнений в целых числах.</li> </ul> <p><b>Уметь:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– идентифицировать понятие и применять</li> </ul>	ОПК – 8

	<p>подходящие факты для решения задач;</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– раскладывать число на простые множители;</li> <li>– находить НОД и НОК чисел;</li> <li>– решать линейные диофантовы уравнения с двумя неизвестными;</li> <li>– применять различные приёмы и методы для решения нелинейных уравнений в целых числах и задач, сводящихся к этим уравнениям.</li> </ul>	
--	--	--

**1.3. Категории обучающихся:** уровень образования – высшее образование, направление подготовки – педагогическое образование, область профессиональной деятельности – обучение математикена уровне основного общего и среднего общего образования в общеобразовательной организации.

**1.4. Форма обучения:** очная, с применением дистанционных образовательных технологий.

**1.5. Режим занятий:** 2 занятия в неделю, продолжительность одного занятия – 2 академических часа.

**1.6. Трудоемкость программы:** 36 часов.

## РАЗДЕЛ 2. СОДЕРЖАНИЕ ПРОГРАММЫ

### 2.1. Учебный (тематический) план

п/п	Наименование разделов и тем	Аудиторные учебные занятия, учебные работы			Внеаудиторная работа	Формы контроля	Трудоёмкость
		Всего ауд. часов	Лекции	Практические занятия			
1	2	3	4	5	6	7	8
<b>1</b>	<b>Раздел 1. Делимость</b>	<b>8</b>	<b>3,5</b>	<b>4,5</b>	<b>5</b>		<b>13</b>
1.1	Делимость целых чисел	2	0,5	1,5	1		3
1.2	Деление с остатком	2	1	1	1		3
1.3	Сравнение по модулю	2	1	1	1		3
1.4	Признаки делимости и равноостаточности	2	1	1	2	Контрольная работа №1	4
<b>2</b>	<b>Раздел 2. НОД целых чисел</b>	<b>6</b>	<b>2,5</b>	<b>3,5</b>	<b>4</b>		<b>10</b>
2.1	НОД целых чисел. Алгоритм Евклида	2	1	1	1		3
2.2	Линейное представление НОД двух чисел	2	1	1	1		3
2.3	Линейные диофантовы уравнения с двумя неизвестными	2	0,5	1,5	2	Контрольная работа №2	4
<b>3</b>	<b>Раздел 3. Простые числа</b>	<b>4</b>	<b>1</b>	<b>3</b>	<b>2</b>		<b>6</b>
3.1	Разложение на простые множители. Основная теорема арифметики	2	0,5	1,5	1		3
3.2	НОД и НОК	2	0,5	1,5	1	Контрольная работа №3	3
<b>4</b>	<b>Раздел 4. Диофантовы уравнения и приводящие к ним задачи</b>	<b>4</b>	<b>1,5</b>	<b>2,5</b>	<b>3</b>		<b>7</b>
4.1	Основные методы решения диофантовых уравнений	2	0,5	1,5	1		3
4.2	Текстовые задачи, приводящие к уравнениям в целых числах	2	1	1	2	Контрольная работа №4	4

	<b>Итоговая аттестация</b>					Зачет на основании совокупности выполненных контрольных работ №№1-4	
	<b>Итого</b>	<b>22</b>	<b>8,5</b>	<b>13,5</b>	<b>14</b>		<b>36</b>

## 2.2. Учебная программа

Темы	Виды учебных занятий	Содержание
1	2	3
<b>Раздел 1. Делимость</b>		
1.1 Делимость целых чисел	Лекция, 0,5 часа	Определение делимости целого числа на натуральное, свойства делимости целых чисел.
	Практическое занятие, 1,5 часа	Использование свойств делимости для решения задач. Совместное решение задач.
	Самостоятель- ная работа, 1 час	Индивидуальное решение задач на делимость целых чисел.
1.2 Деление с остатком	Лекция, 1 час	Деление целого числа на натуральное с остатком. Теорема о делении с остатком. Остаток суммы, разности двух чисел.
	Практическое занятие, 1 час	Использование единственности разложения при делении с остатком. Применение принципа Дирихле к решению задач на деление с остатком. Свойства полного квадрата. Совместное решение задач.
	Самостоятель- ная работа, 1 час	Индивидуальное решение задач на деление с остатком.
1.3 Сравнение по модулю	Лекция, 1 час	Сравнение по модулю натурального числа. Свойства сравнения по модулю.
	Практическое занятие, 1 час	Использование свойств сравнения для доказательства делимости, нахождения последней цифры числа или остатка от деления, доказательства отсутствия целочисленных решений уравнений. Совместное решение задач.
	Самостоятель- ная работа, 1 час	Индивидуальное решение задач с использованием сравнения по модулю.

1.4 Признаки делимости и равноостаточности	Лекция, 1 час	Признаки делимости и равноостаточности на 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10, 11, 25 (доказательства признаков с использованием сравнения по модулю).
	Практическое занятие, 1 час	Сумма цифр, как инвариант. Использование делимости на 3 и на 9 для доказательства того, что число не является полным квадратом. Совместное решение задач.
	Самостоятельная работа, 2 часа	Индивидуальное решение задач. Контрольная работа №1.
<b>Раздел 2. НОД целых чисел</b>		
2.1 НОД целых чисел. Алгоритм Евклида	Лекция, 1 час	НОД целых чисел. Основные свойства НОД. Алгоритм Евклида для нахождения НОД. Геометрическая интерпретация алгоритма Евклида.
	Практическое занятие, 1 час	Использование свойств НОД и алгоритма Евклида для его нахождения. Использование НОД для доказательства несократимости дроби. Совместное решение задач.
	Самостоятельная работа, 1 час	Индивидуальное решение задач с использованием алгоритма Евклида.
2.2 Линейное представление НОД двух чисел	Лекция, 1 час	Линейное представление НОД двух чисел (соотношение Безу). Взаимно простые числа. Критерий взаимной простоты. Использование соотношения Безу для доказательства теорем о делимости.
	Практическое занятие, 1 час	Нахождение линейного соотношения с помощью алгоритма Евклида. Числа Фибоначчи, как «наихудший» случай для алгоритма Евклида. Нахождение НОД двух чисел Фибоначчи. Расширенный алгоритм Евклида. Совместное решение задач.
	Самостоятельная работа, 1 час	Индивидуальное решение задач на нахождение линейного представления НОД двух чисел.
2.3 Линейные диофантовы уравнения с двумя неизвестными	Лекция, 0,5 часа	Разрешимость и общий вид решений линейных диофантовых уравнений $ax=b$ , $ax=by$ , $ax+by=c$ .
	Практическое занятие, 1,5 часа	Поиск частного решения линейного диофантова уравнения с двумя неизвестными с помощью соотношения Безу. Совместное решение задач.
	Самостоятельная работа, 2 часа	Индивидуальное решение задач, сводящихся к линейным диофантовым уравнениям с двумя неизвестными. Контрольная работа №2.

<b>Раздел 3. Простые числа</b>		
3.1 Разложение на простые множители. Основная теорема арифметики	Лекция, 0,5 часа	Простые и составные числа. Бесконечность множества простых чисел. Разложение на простые множители составного числа. Основная теорема арифметики.
	Практическое занятие, 1,5 часа	Использование основной теоремы арифметики для поиска целочисленных решений уравнения. Количество делителей натурального числа. Совместное решение задач.
	Самостоятельная работа, 1 час	Индивидуальное решение задач с использованием основной теоремы арифметики.
3.2 НОД и НОК	Лекция, 0,5 часа	НОК двух целых чисел. Поиск НОД и НОК с помощью разложения на простые множители. Связь между НОК и НОД.
	Практическое занятие, 1,5 часа	Нахождение НОД и НОК для данных чисел. Нахождение чисел при известных НОД и НОК. Совместное решение задач.
	Самостоятельная работа, 1 час	Индивидуальное решение задач. Контрольная работа №3.
<b>Раздел 4. Диофантовы уравнения и приводящие к ним задачи</b>		
4.1 Основные методы решения диофантовых уравнений	Лекция, 0,5 часа	Использование разложения на множители и замены переменной при решении диофантовых уравнений.
	Практическое занятие, 1,5 часа	Совместное решение задач.
	Самостоятельная работа, 1 час	Индивидуальное решение задач.
4.2 Текстовые задачи, приводящие к уравнениям в целых числах	Лекция, 1 час	Построение математической модели для решения текстовой задачи. Введение новых переменных. Повторение различных методов решения уравнений в целых числах.
	Практическое занятие, 1 час	Совместное решение текстовых задач, приводящих к решению уравнений в целых числах.
	Самостоятельная работа, 2 часа	Индивидуальное решение текстовых задач, приводящих к решению уравнений в целых числах. Контрольная работа №4.
<b>Итоговая аттестация</b>		Зачет на основании совокупности выполненных контрольных работ №№1-4

### РАЗДЕЛ 3. ФОРМЫ АТТЕСТАЦИИ И ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

**3.1. Текущий контроль** – контрольные работы № 1-4 по темам разделов 1-4.

#### 3.1.1. Варианты заданий для контрольной работы № 1

1. Число  $5a + 4b$  делится на 7. Докажите, что число  $a + 5b$  тоже делится на 7.
2. Найдите остаток от деления числа  $10! + 2022$  на 81.
3. Число  $a$  при делении на 7 даёт остаток 2. Какой остаток будет давать число  $-a$  при делении на 7?
4. Число  $a$  при делении на 4 даёт остаток 3. Найдите все возможные остатки, которые может давать число  $a$  при делении на 12?
5. Найдите все числа, которые при делении на 3 дают остаток 1, а при делении на 5 остаток 3.
6. Найдите последнюю цифру числа  $17^{2013}$ .
7. Докажите, что  $13^n + 5$  делится на 6 для любого натурального  $n$ .
8. Может ли дискриминант квадратного трехчлена с целыми коэффициентами равняться 2023?
9. В числе 4758967□ напишите последнюю цифру такую, чтобы число делилось на а) 3, б) 4, в) 9, г) 25, д) 11.
10. Может ли число в десятичной записи которого 100 единиц, 25 двоек и 40 нулей, являться полным квадратом?

#### 3.1.2. Варианты заданий для контрольной работы № 2

1. Найдите НОД(12345,54321).
2. Докажите, что дробь  $\frac{n}{3n+1}$ , где  $n$  – натуральное число, несократима.
3. Решите в целых числах уравнение  $3x + 2y = 7$ .
4. Пользуясь алгоритмом Евклида, найдите все целочисленные решения уравнения  $123x - 97y = 1$ .
5. Найдите наибольшее трёхзначное число  $a$ , при которых уравнение

$12x + 18y = a$  имеет решение.

6. Найдите все целые числа, которые при делении на 28 дают остаток 9, а при делении на 54 – остаток 17.

### 3.1.3. Варианты заданий для контрольной работы № 3

1. Разложите число 2268 на простые множители и найдите количество натуральных делителей этого числа.
2. Сколькими нулями заканчивается число  $100!$  ?
3. Найдите два натуральных числа, разность которых равна 66, а наименьшее общее кратное равно 360.
4. Найдите все натуральные  $n$  такие, что числа  $n - 2, n + 24, n + 26$  – простые.
5. При каких натуральных  $n$  число  $n^4 + 4$  является составным?
6. Найдите такие натуральные числа  $m$  и  $n$ , что  $\text{НОД}(m,n)=12$ ,  $\text{НОК}(m,n)=420$ .

### 3.1.4. Варианты заданий для контрольной работы № 4

1. Двухзначное число в 6 раз больше суммы его цифр. Найдите это число.
2. Решите в целых числах уравнение  $x^2 - xy - 2y^2 = 1$ .
3. Можно ли из двадцати монет достоинством 5, 20 и 50 копеек составить сумму в 5 рублей?
4. Найдите все натуральные  $n$ , при которых значение выражения  $\frac{4n-1}{n+2}$  является целым числом.
5. В классе 27 учащихся. Может ли каждый из них дружить ровно с девятью одноклассниками?
6. Может ли дискриминант квадратного трехчлена с целыми коэффициентами равняться 2023?

### 3.1.5. Требования к выполнению контрольных работ №№1-4

Контрольные работы выполняются слушателем на листах формата А4. Обязательным является наличие титульного листа. Контрольная работа №1 включает 10 заданий, контрольные работы №№ 2-4 включают 6 заданий, соответствующих заданиям рассмотренных тем. Решение заданий контрольной

работы должно быть развернутым, т.е. полным и обоснованным.

### **3.1.6. Критерии оценивания контрольных работ №№1-4**

Для оценки заданий контрольных работ №№ 1-4 применяются критерии, аналогичные критериям школьных оценок.

### **3.1.7. Оценивание контрольных работ №№1-4**

Каждый номер контрольных работ №№ 1-4 оценивается 0, 1, 2, 3, 4 или 5 баллами. Таким образом, максимальная оценка за контрольную работу №1 составляет 50 баллов, за контрольные работы №№ 2-4 – 30 баллов. Максимальный балл за все контрольные работы – 140 баллов.

## **3.2. Итоговая аттестация**

**3.2.1. Итоговая аттестация** – зачет как совокупность выполненных контрольных работ №№ 1-4. Итоговая аттестация осуществляется на основании полученных совокупных баллов за контрольные работы №№1-4. Зачет ставится, если по результатам выполнения контрольных работ слушатель набрал не менее 100 баллов.

### **3.2.2. Оценивание: зачет/незачет**

## РАЗДЕЛ 4. ОРГАНИЗАЦИОННО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЕ УСЛОВИЯ РЕАЛИЗАЦИИ ПРОГРАММЫ

### 4.1. Учебно-методическое обеспечение и информационное обеспечение программы

#### 4.1.1. Основная литература:

1. Н.Б. Алфутова, А.В. Устинов. Алгебра и теория чисел. Сборник задач для математических школ. М.: МЦНМО, 2002. 264 с.
2. А.В. Бегунц, П.А. Бородин, Д.В. Горяшин, А.С. Зеленский, В.С. Панферов, И.Н. Сергеев, И.А. Шейпак. Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике (2005-2019). М.: МЦНМО, 2020. 232 с.
3. Н.Я. Виленкин. Алгебра 8. 9-е изд., дораб. М.: Просвещение, 2010. 303 с.
4. М.Л. Галицкий, А.М. Гольдман, Л.И. Звавич. Сборник задач по алгебре. 8-9 классы: учеб. пособие для учащихся общеобразовательных организаций. М.: Просвещение, 2016. 301 с.
5. А.С. Зеленский, А.И. Козко, В.С. Панфёров, И.Н. Сергеев, И.А. Шейпак. Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике (2013-2018). Изд. 2-е, исправленное. М.: МЦНМО, 2019. 192 с.
6. А.А. Прокофьев, А.Г. Корянов. ЕГЭ Математика. Задачи на целые числа. Типовое задание 19. Профильный уровень. М.: Легион, 2019. 304 с.

#### 4.1.2 Дополнительная литература:

1. А.А. Бухштаб. Теория чисел. М.: Просвещение, 1966. 385 с.
2. Н.Я. Виленкин, А.Н. Виленкин, Г.С. Сурвилло и др. Алгебра: Учеб. для учащихся 8 кл. с углубл. изуч. математики. М.: Просвещение, 2003. 256 с.
3. И.М. Виноградов. Основы теории чисел. М.: Гостехиздат, 1952. 180 с.
4. Ойстин Оре. Приглашение в теорию чисел. М.: Наука, 1980. 128 с.
5. Вацлав Серпинский. 250 задач по элементарной теории чисел. М.:

Просвещение, 1968. 168 с.

#### **4.1.3. Интернет-ресурсы:**

1. Образовательный портал «Решу ЕГЭ». Режим доступа: <https://math-ege.sdamgia.ru/> (дата обращения: 06.11.2022).
2. Открытый банк тестовых заданий ЕГЭ/Математика профильная. Режим доступа: <http://os.fipi.ru/tasks/2/a> (дата обращения: 06.11.2022).
3. Интернет-библиотека Виталия Арнольда <http://ilib.mcsme.ru> (дата обращения: 06.11.2022).

#### **4.2. Материально-технические условия реализации программы:**

Для проведения очных занятий с применением дистанционных образовательных технологий используется компьютер с возможностью выхода в интернет, средства аудио- и видеосвязи. Взаимодействие преподавателя и слушателей во время занятий проходит посредством специальных платформ для проведения групповых видеоконференций.