Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе МФТИ

_____ А.А. Воронов
«10» февраля 2023 г.

Дополнительная профессиональная программа
(повышения квалификации)

Формирование умений учащихся решать задачи повышенного уровня сложности в рамках реализации проекта «Математическая вертикаль ПЛЮС»

Разработчик:
Подлипский О. К., доцент
кафедры математики МФТИ

Москва, 2023

Раздел 1. «Характеристика программы»

1.1. Цель реализации программы: совершенствование профессиональных компетенций слушателей в области формирования умений учащихся решать задачи повышенного уровня сложности в рамках реализации проекта «Математическая вертикаль ПЛЮС».

1.2. Совершенствуемые/формируемые компетенции

№ п/п	Компетенции	Направление подготовки 44.03.01Педагогическое образование
		Бакалавриат
		Код компетенции
1.	Способен осуществлять контроль и оценку формирования результатов образования обучающихся, выявлять и корректировать трудности в обучении	ОПК-5

1.3. Описание трудовых функций, входящих в профессиональный стандарт (функциональная карта вида профессиональной деятельности)

Обобщенные трудовые функции			Трудовые функции		
код	наименование	уровень квалификации	наименование	код	уровень (подуровень) квалификации
А	Педагогическая деятельность по проектированию и реализации образовательного процесса в образовательных организациях дошкольного, начального общего, основного общего, среднего общего образования	6	Общепедагогическая функция. Обучение	А/01.6	6

1.4. Планируемые результаты обучения

№ п/п	Уметь – знать	Направление подготовки 44.03.01Педагогическое образование Бакалавриат Код компетенции	Профессиональный стандарт		
			трудовое действие	необходимые умения	необходимые знания
1.	**Уметь:** решать задачи повышенного уровня сложности по алгебре, геометрии, комбинаторике и теории вероятностей для выявления возможных трудностей в обучении, их корректировки и оценивания **Знать:** – структуру и типологию задач повышенного уровня сложности по математики в рамках реализации проекта «Математическая вертикаль ПЛЮС»; – алгоритмы решения задач повышенного уровня сложности по алгебре, геометрии, комбинаторике и теории вероятностей для выявления возможных трудностей в обучении, их корректировки и оценивания	**ОПК-5**	Организация, осуществление контроля и оценки учебных достижений, текущих и итоговых результатов освоения основной образовательной программы обучающимися	Объективно оценивать знания обучающихся на основе тестирования и других методов контроля в соответствии с реальными учебными возможностями детей	Пути достижения образовательных результатов и способы оценки результатов обучения
2.	**Уметь:** проектировать систему заданий, ориентированных на формирование умений учащихся решать задачи повышенного уровня сложности по алгебре, геометрии, комбинаторике и теории вероятностей для выявления				

	возможных трудностей в обучении, их корректировки и оценивания **Знать:** стратегию проектирования системы заданий, ориентированных на формирование умений учащихся решать задачи повышенного уровня сложности по алгебре, геометрии, комбинаторике и теории вероятностей для выявления возможных трудностей в обучении, их корректировки и оценивания				

1.5. Категория обучающихся: уровень образования ВО, область профессиональной деятельности – обучение математике учащихся на уровне среднего общего образования в рамках реализации проекта «Математическая вертикаль ПЛЮС»

1.6. Форма обучения: очная с использованием дистанционных образовательных технологий

1.7. Режим занятий: 1 день в неделю, 6 недель

1.8. Трудоемкость: 36 академических часов

Раздел 2. «Содержание программы»

2.1. Учебный план внесите коррективы с учетом рабочей программы: часы, формулировки

№ п/п	Наименование разделов (модулей) и тем	Аудиторные учебные занятия, учебные работы, час.			Внеаудиторная работа, самостоятельная работа	Формы контроля	Трудоемкость, час.
		Всего аудиторных часов	Из них				
			Лекции	Практические занятия			
1.	**Модуль 1. Задачи повышенного уровня сложности по алгебре и геометрии: решение, проектирование системы заданий**	**10**	**4**	**6**	**8**		**18**
1.1.	Задачи повышенного уровня сложности по теории чисел	3	1	2	-		3
1.2.	Задачи повышенного уровня сложности по алгебре	3	1	2	-		3
1.3.	Задачи повышенного уровня сложности по геометрии	3	1	2	3	Тест №1	6

1.4.	Формирование умений учащихся решать задачи повышенного уровня сложности в рамках реализации проекта «Математическая вертикаль ПЛЮС» по алгебре и геометрии	1	1	-	5	Практическая работа №1	6
2.	**Модуль 2. Задачи повышенного уровня сложности по комбинаторике и теории вероятностей: решение, проектирование системы заданий**	**10**	**4**	**6**	**8**		**18**
2.1.	Задачи повышенного уровня сложности по комбинаторике	3	1	2	-		3
2.2.	Задачи повышенного уровня сложности по теории графов	3	1	2	-		3
2.3.	Задачи повышенного уровня сложности по теории вероятностей	3	1	2	3	Тест №2	6
2.4.	Формирование умений учащихся решать задачи повышенного уровня сложности в рамках реализации проекта «Математическая вертикальПЛЮС» по комбинаторике и теории вероятностей	1	1	-	5	Практическая работа №2	6
3.	Итоговая аттестация					Зачет на основании совокупности результатов тестов №1, №2, практических работ №1, №2, выполненных на положительную оценку	
Итого		**20**	**8**	**12**	**16**		**36**

2.2. Календарный учебный график

№	Наименование раздела, темы	Объем нагрузки, час.	Учебные недели[1]					
			1 неделя	2 неделя	3 неделя	4 неделя	5 неделя	6 неделя
1.	**Задачи повышенного уровня сложности по алгебре и геометрии: решение, проектирование системы заданий**	18						
1.1	Задачи повышенного уровня сложности по теории чисел	3	Л, П					
1.2	Задачи повышенного уровня сложности по алгебре	3	Л, П					
1.3	Задачи повышенного уровня сложности по геометрии	6		Л, П.	Т.1			
1.4	Формирование умений учащихся решать задачи повышенного уровня сложности в рамках реализации проекта «Математическая вертикальПЛЮС» по алгебре и геометрии	6			Л, ПР.1			
2.	**Задачи повышенного уровня сложности по комбинаторике и теории вероятностей: решение, проектирование системы заданий**	18						
2.1	Задачи повышенного уровня сложности по комбинаторике	3				Л, П		
2.2	Задачи повышенного уровня сложности по теории графов	3				Л, П		
2.3	Задачи повышенного уровня сложности по теории вероятностей.	6					Л, П	Т.2
2.4	Формирование умений учащихся решать задачи повышенного уровня сложности в рамках реализации проекта «Математическая вертикальПЛЮС» по комбинаторике и теории вероятностей	6						Л, ПР.1
3	Итоговая аттестация							З

2.3. Рабочая программа

Наименование разделов/модулей, тем	Виды учебных занятий / ученых работ, час.	Содержание
Модуль 1. Задачи повышенного уровня сложности по алгебре и геометрии: решение, проектирование системы заданий		
Тема 1.1. Задачи повышенного уровня сложности по теории чисел	Лекция – 1 час	Структура и типология задач повышенного уровня сложности по теории чисел. Алгоритмы решения задач повышенного уровня сложности по теории чисел с: применением методов решения диофантовых уравнений, китайской теоремы об остатках; использованием основной теоремы арифметики. Применение комбинации рассматриваемых алгоритмов для выявления возможных трудностей в обучении, их корректировки и оценивания.
	Практическое занятие – 2 часа	**Тренинг №1** 1. Решение задач повышенного уровня сложности по теории чисел с: применением методов решения задач повышенного уровня сложности по теории чисел, применением методов решения диофантовых уравнений, использованием основной теоремы арифметики, применением китайской теоремы об остатках. 2. Определение возможных трудностей в обучении решению представленных задач, их корректировки и оценивания.
Тема 1.2 Задачи повышенного уровня сложности по алгебре	Лекция – 1 час	Структура и типология нестандартные задачи повышенного уровня сложности по алгебре. Алгоритмы решения нестандартных задач повышенного уровня сложности по алгебре с: применением теоремы Безу, использованием неравенства о средних, использованием метода Штурма доказательства неравенств, применением комбинации рассматриваемых алгоритмов для решения задач повышенной трудности для выявления возможных трудностей в обучении, их корректировки и оценивания.
	Практическое занятие – 2 часа	**Тренинг №2** 1. Решение задач повышенного уровня сложности по алгебре с: применением методов решения задач повышенного уровня сложности по алгебре, применением теоремы Безу, использованием неравенства о средних, использованием метода Штурма доказательства неравенств. 2. Определение возможных трудностей в обучении решению представленных задач, их корректировки и оценивания.

Тема 1.3. Задачи повышенного уровня сложности по геометрии	Лекция – 1 часа	Структура и типология задач повышенного уровня сложности по геометрии. Методы и алгоритмы решения задач повышенного уровня сложности по геометрии с: использованием дополнительных построений, использованием неравенства треугольника, использованием вспомогательного многогранника, применением комбинации рассматриваемых методов для выявления возможных трудностей в обучении, их корректировки и оценивания
	Практическое занятие – 2 час	**Тренинг №3** 1. Решение задач повышенного уровня сложности по геометрии с: использованием дополнительных построений, использованием неравенства треугольника, использованием вспомогательного многогранника 2. Определение возможных трудностей в обучении решению представленных задач, их корректировки и оценивания.
	Самостоятельная работа – 3 часа	**Систематизация материала тем 1.1 – 1.3** **Тест №1** Решение задач повышенного уровня сложности по алгебре и геометрии
Тема 1.4 Формирование умений учащихся решать задачи повышенного уровня сложности в рамках реализации проекта «Математическая вертикальПЛЮС» по алгебре и геометрии	Лекция – 1 час	Стратегия и примеры проектирования системы заданий, ориентированных на формирование умений учащихся решать задачи повышенного уровня сложности по алгебре, геометрии для выявления возможных трудностей в обучении, их корректировки и оценивания
	Самостоятельная работа – 5 час	**Практическая работа №1** Проектирование системы заданий, ориентированных на формирование умений учащихся решать задачи повышенного уровня сложности по алгебре, геометрии, для выявления возможных трудностей в обучении, их корректировки и оценивания (предмет, типы задач, умения по выбору обучающегося)
Модуль 2. Задачи повышенного уровня сложности по комбинаторике и теории вероятностей: решение, проектирование системы заданий		
Тема 2.1. Задачи повышенного уровня сложности по комбинаторике	Лекция – 1 час	Структура и типология задач повышенного уровня сложности на комбинаторику. Методы и алгоритмы решения задач повышенного уровня сложности на комбинаторику с: использованием треугольника Паскаля и бинома Ньютона, использованием формулы включений-исключений для нескольких объектов, использованием метода «шары и перегородки» для выявления возможных трудностей в обучении, их корректировки и оценивания.
	Практическое	**Тренинг №4**

	занятие – 2 часа	1. Решение задач повышенного уровня сложности по комбинаторике с: использованием треугольника Паскаля и бинома Ньютона, использованием формулы включений-исключений для нескольких объектов, использованием метода «шары и перегородки» 2. Определение возможных трудностей в обучении решению представленных задач, их корректировки и оценивания.
Тема 2.2. Задачи повышенного уровня сложности по теории графов	Лекция – 1 час	Структура и типология нестандартных задач повышенного уровня сложности по теории графов. Алгоритмы решения нестандартных задач повышенного уровня сложности по теории графов с: использованием ориентированных графов, использованием вершинных и реберных раскрасок графа для выявления возможных трудностей в обучении, их корректировки и оценивания.
	Практическое занятие – 2 часа	**Тренинг №5** 1. Решение задач повышенного уровня сложности по теории графов с: использованием ориентированных графов, использованием вершинных и реберных раскрасок графа. 2. Определение возможных трудностей в обучении решению представленных задач, их корректировки и оценивания.
Тема 2.3. Задачи повышенного уровня сложности по теории вероятностей	Лекция – 1 час	Структура и типология нестандартных задач повышенного уровня сложности по теории вероятностей. Алгоритмы решения нестандартных задач повышенного уровня сложности по теории вероятностей с: использованием условной вероятности и формулы произведения, применением формулы Байеса для выявления возможных трудностей в обучении, их корректировки и оценивания.
	Практическое занятие – 2 час	**Тренинг №6** 1. Решение задач повышенного уровня сложности по теории вероятностей с: использованием условной вероятности и формулы произведения, применением формулы Байеса. 2. Определение возможных трудностей в обучении решению представленных задач, их корректировки и оценивания.
	Самостоятельная работа – 3 часов	**Систематизация материала тем 2.1 – 2.3** **Тест №2** Решение задач повышенного уровня сложности по комбинаторике и теории вероятностей
Тема 2.4 Формирование умений учащихся решать задачи	Лекция – 1 час	Стратегия и примеры проектирования системы заданий, ориентированных на формирование умений учащихся решать задачи повышенного уровня сложности по комбинаторике и теории

повышенного уровня сложности в рамках реализации проекта «Математическая вертикаль ПЛЮС» по комбинаторике и теории вероятностей		вероятностей для выявления возможных трудностей в обучении, их корректировки и оценивания
	Самостоятельная работа – 5 часа	**Практическая работа №2** Проектирование системы заданий, ориентированных на формирование умений учащихся решать задачи повышенного уровня сложности по комбинаторике и теории вероятностей для выявления возможных трудностей в обучении, их корректировки и оценивания (предмет, типы задач, умения по выбору обучающегося)
Итоговая аттестация		Зачет на основании совокупности результатов тестов №1, №2, практических работ №1, 2, выполненных на положительную оценку

Раздел 3. «Формы аттестации и оценочные материалы»

3.1. Текущий контроль

3.1.1 Тест №1 Алгебра и геометрия (содержит 6 задач по темам 1.1 – 1.3.)

Решение задач повышенного уровня сложности по алгебре и геометрии.

Примеры задач теста №1:

1. Пусть N – натуральное число. При каком **наименьшем** N произведение $N(N+4)(N+8)(N+12)(N+16)$ будет делиться на 10^6?
Ответ. 62484.

2. В параболу $y=4x^2$ вписан прямоугольный треугольник (то есть все вершины треугольника лежат на параболе), гипотенуза которого параллельна оси Ox. Найдите наибольшую возможную длину высоты этого треугольника, опущенной на гипотенузу.

Ответ. 0,25.

3. На каждом из рёбер куба с ребром длины 1 и на одной из главных диагоналей (длины $\sqrt{3}$) выбраны направления. Какую наименьшую длину может иметь сумма полученных 13 векторов?

Ответ. $\sqrt{3}$.

Требования к выполнению теста: задачи решаются на основании методов и алгоритмов, представленных в темах 1.1. – 1.3.

Критерии оценивания:

1. Правильно выбраны и применены алгоритмы к данным задачам.
2. Правильно решено не менее 80% задач.

Оценивание: зачет/незачет.

3.1.2 Тест №2 Комбинаторика и теория вероятностей (содержит 6 задач по темам 2.1 – 2.3.)

Решение задач повышенного уровня сложности по комбинаторике и теории вероятностей

Примеры задач теста №2:

1. У Миши есть четыре банки с красками разного цвета. Сколькими различными способами он может покрасить забор, состоящий из 7 досок, так, чтобы любые две соседние доски были разных цветов и при этом он использовал краски не менее чем трех цветов? Первая и последняя доски забора не являются соседними.

Ответ. 2904.

2. В графе без циклов 20 вершин и 15 ребер. Сколько компонент связности в этом графе?

Ответ. 5.

3. Игральную кость бросили один или несколько раз. Оказалось, что сумма всех выпавших очков равна 4. Какова вероятность того, что потребовалось сделать три броска? Результат округлите до сотых.
Ответ. 0,05.

Требования к выполнению теста: задачи решаются на основании методов и алгоритмов, представленных в темах 2.1. – 2.3.

Критерии оценивания:

1. Правильно выбраны и применены алгоритмы к данным задачам.
2. Правильно решено не менее 80% задач.

Оценивание: зачет/незачет.

3.1.3 Практическая работа №1

Проектирование системы заданий, ориентированных на формирование умений учащихся решать задачи повышенного уровня сложности по алгебре, геометрии для выявления возможных трудностей в обучении, их корректировки и оценивания (предмет, типы задач, умения по выбору обучающегося)

Требования к выполнению работы: работа осуществляется на основании стратегии проектирования системы заданий, ориентированных на формирование умений учащихся решать задачи повышенного уровня сложности по алгебре, геометрии для выявления возможных трудностей в обучении, их корректировки и

оценивания

Критерии оценивания:

1. Все шаги стратегии выполнены правильно в полном объеме.
2. Представленная система заданий позволяет полноценно сформировать умения решать задачи выбранного типа.
3. Определены узловые операции алгоритмов, которые могут вызвать трудности в обучении и запланирована система пропедевтических и коррекционных заданий.
4. Представлена система оценочных заданий, направленных на оценивание уровня сформированности умений решать задачи повышенного уровня сложность выбранного типа.

Оценивание: зачет/незачет.

3.1.4 Практическая работа № 2

Проектирование системы заданий, ориентированных на формирование умений учащихся решать задачи повышенного уровня сложности по комбинаторике и теории вероятностей для выявления возможных трудностей в обучении, их корректировки и оценивания (предмет, типы задач, умения по выбору обучающегося)

Требования к выполнению работы: работа осуществляется на основании стратегии проектирования системы заданий, ориентированных на формирование умений учащихся решать задачи повышенного уровня сложности по комбинаторике и теории вероятностей для выявления возможных трудностей в обучении, их корректировки и оценивания

Критерии оценивания:

1. Все шаги стратегии выполнены правильно в полном объеме.
2. Представленная система заданий позволяет полноценно сформировать умения решать задачи выбранного типа.
3. Определены узловые операции алгоритмов, которые могут вызвать трудности в обучении и запланирована система пропедевтических и

коррекционных заданий.

4. Представлена система оценочных заданий, направленных на оценивание уровня сформированности умений решать задачи повышенного уровня сложность выбранного типа.

Оценивание: зачет/незачет.

3.2. Итоговая аттестация: зачет на основании совокупности результатов тестов № 1,2, практических работ №№1, 2 выполненных на положительную оценку

Оценивание: зачет/незачет.

Раздел 4. «Организационно-педагогические условия реализации программы»

4.1. Учебно-методическое и информационное обеспечение программы

4.1.1. Основная литература

1. **Генкин, С.А.** Ленинградские математические кружки: пособие для внеклассной работы / И.В. Итенберг, Д.В. Фомин. — 2-е изд., стер. — М.: МЦНМО, 2022. — 272с. — ISBN 5-87400-072-0

2. **Калинин, А.Ю.** Геометрия. 10–11 классы: учебник / Д.А. Терёшин. — 2-е изд, стер. — М.: МЦНМО, 2015. — 640 с. — ISBN 978-5-4439-0381-1

3. **Математическая вертикаль. Теория вероятностей и статистика.** 7-9 классы: учеб. пособие для общеобразоват. организаций / [И . Р. Высоцкий и др.]; под ред. И. В. Ященко. — М.: Просвещение, 2020. — 256 с.: ил. — ISBN 978-5-09-074559-8.

4. **Теория вероятностей и статистика**: экспериментальное учебное пособие для 10 и 11 классов общеобразовательных учреждений/ Ю.Н.Тюрин, А.А.Макаров,

И.Р. Высоцкий, И.В. Ященко. – М.: МЦНМО, 2014. – 248 с. — ISBN 978-5-4439-0724-6

4.1.2. Дополнительная литература

1. **Агаханов, Н.Х.** Муниципальные олимпиады Московской области по математике: электронное издание/ Н.Х. Агаханов, О.К. Подлипский. – М.: МЦНМО, 2019. – 395 с. - ISBN 978-5-4439-3310-8

2. **Олимпиада "Физтех". Математика (задачи 2015–2020 гг.)**: учебное пособие /Агаханов Н.Х., Богданов И.И., Глухов И.В., Головко А.Ю. [и др.] – М.: Физматкнига, 2022. – 340 с. - ISBN 978-5-89155-342-2

4.1.3. Интернет-источники

1. Интернет-проект «Задачи»: сайт. – Москва, МЦНМО, 2004 –.– URL: https://problems.ru/ (дата обращения: 31.02.2023).

2. Математическая вертикаль - Школьный проект - Abitu.Net: сайт. – Москва, 2012 –.– URL: https://abitu.net/project/4/3524237 (дата обращения: 31.02.2023).

4.2. Материально-технические условия реализации программы

Для реализации программы необходимо следующее материально-техническое обеспечение:

– компьютерное и мультимедийное оборудование с подключением к сети Интернет;

– доступ к платформе дистанционного обучения по адресу abitu.net/vertical.

4.3. Кадровые условия реализации программы

Подлипский Олег Константинович − доцент кафедры высшей математики МФТИ, кандидат физико-математических наук, доцент. Учитель математики физико-математического лицея №5 г. Долгопрудный. Член жюри Всероссийской олимпиады школьников по математике (заключительный, региональный, муниципальный этапы). Заместитель Председателя Центральной предметно-методической комиссии Всероссийской олимпиады школьников по математике. Лауреат Премии Правительства Российской Федерации в области образования. Почетный работник сферы образования Российской Федерации. Преподаватель онлайн-проекта по подготовке к региональному этапу Всероссийской олимпиады школьников по математике (https://abitu.net/course/1197, http://abitu.net/course/1302).\

Агаханов Назар Хангельдыевич - доцент кафедры высшей математики МФТИ, кандидат физико-математических наук, доцент. Учитель математики физико-математического лицея №5 г. Долгопрудный. Председатель Центральной предметно-методической комиссии Всероссийской олимпиады школьников по математике. Член жюри Всероссийской олимпиады школьников по математике (заключительный, региональный, муниципальный этапы). Заслуженный работник высшей школы. Лауреат Премии

Терешин Дмитрий Александрович - доцент кафедры высшей математики МФТИ, кандидат педагогических наук. Учитель математики физико-математического лицея №5 г. Долгопрудный. Член жюри Всероссийской олимпиады школьников по математике (заключительный, региональный, муниципальный этапы). Член Центральной предметно-методической комиссии Всероссийской олимпиады школьников по математике. Заслуженный преподаватель МФТИ.

Молчанов Евгений Геннадьевич - доцент кафедры высшей математики МФТИ, кандидат физико-математических наук. Член жюри Всероссийской

олимпиады школьников по математике (заключительный, региональный, муниципальный этапы). Дубинская Вера Юльевна - доцент кафедры высшей математики МФТИ, кандидат физико-математических наук, доцент. Член методической комиссии олимпиады «Физтех» по математике. Почетный работник сферы образования Российской Федерации. Заслуженный преподаватель МФТИ.

Головко Андрей Юрьевич - старший преподаватель кафедры высшей математики МФТИ. Учитель математики физико-математического лицея №5 г. Долгопрудный. Член методической комиссии олимпиады «Физтех» по математике.

Глухов Илья Викторович - старший преподаватель кафедры высшей математики МФТИ, преподаватель подготовительных курсов в МФТИ. Член методической комиссии олимпиады «Физтех» по математике.