

Министерство просвещения Российской Федерации
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский педагогический государственный университет»



УТВЕРЖДАЮ

Зам. председателя
Координационного экспертного совета
по дополнительному образованию МПГУ

проректор по дополнительному образованию,
Д.А. Кудрявцева
протокол от «27» 03 2024г. № 03

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ ПРОГРАММА
повышения квалификации

Институт математики и информатики

«Преподавание математики. Методические аспекты обучения решению
уравнений на уровне среднего общего образования»

Направление: проект ДОНМ:
«Инженерный класс в московской школе»
и «ИТ-класс в московской школе»

Москва – 2024

Раздел 1. «Характеристика программы»

1.1. Цель реализации программы

Цель реализации программы: совершенствование профессиональных компетенций слушателей в области преподавания математики, методических аспектов обучения решению уравнений на уровне среднего общего образования.

№	Компетенция	Направление подготовки 44.03.01 Педагогическое образование
		Бакалавриат
		Код компетенции
1	Способен осуществлять педагогическую деятельность на основе специальных научных знаний	ОПК-8
2	Способен участвовать в разработке основных и дополнительных образовательных программ, разрабатывать отдельные их компоненты (в том числе с использованием информационно-коммуникационных технологий)	ОПК-2

1.2. Совершенствуемые/формируемые компетенции

№	Компетенция	Направление подготовки 44.03.01 Педагогическое образование
		Бакалавриат
		Код компетенции
1	Знать: - основные виды уравнений в курсе математики на уровне среднего общего образования; - области применения различных методов решения уравнений; - алгоритм выбора способа решения уравнения; - алгоритм решения уравнений курса математики на уровне среднего общего образования с использованием заданного или оптимального метода. Уметь: - решать уравнения курса математики на уровне среднего общего образования с использованием заданного или оптимального метода	ОПК-8
2	Знать: - содержание основных и дополнительных образовательных программ, учебных материалов и пособий по математике;	ОПК-2

	- основные затруднения при освоении различных методов решения уравнений; - методические аспекты обучения различным методам решения уравнений в программе курса математики среднего общего образования; - алгоритм разработки элемента урока по математике направленного на решение уравнений оптимальным или заданным способом. Уметь: - разрабатывать элемент урока по математике направленного на решение уравнений оптимальным или заданным способом	
--	---	--

1.3. Категория обучающихся: уровень образования – высшее образование; область профессиональной деятельности – обучение математике на уровне среднего общего образования в рамках проекта «Инженерный класс в московской школе» и «ИТ-класс в московской школе».

1.4. Форма обучения: Очная, с применением ДОТ и ЭО

1.5. Режим занятий: срок обучения – не менее 6 недель; занятия проходят не менее 2 раза в неделю; длительность занятия не менее 3 час.

1.6. Трудоемкость программы: 36 часов.

Раздел 2. «Содержание программы»

2.1. Учебный план

№ п/п	Наименование разделов (модулей) и тем	Всего аудиторных часов	Аудиторные виды учебных занятий, учебных работ		Внеаудиторные виды учебных занятий, учебных работ.	Форма контроля	Трудоемкость
			Лекционные занятия	Практические занятия	Самостоятельная работа		
1	Решение уравнений курса	19	9	10	9		28

№ п/п	Наименовани е разделов (модулей) и тем	Всего аудиторных часов	Аудиторные виды учебных занятий, учебных работ		Внеаудито рные виды учебных занятий, учебных работ.	Форма контроля	Трудоемкость
			Лекционны е занятия	Практиче ские занятия	Самостоя тельная работа		
	математики на уровне среднего общего образования						
1.1	Метод замены переменной	2	1	1	1		3
1.2	Методы решения иррациональн ых уравнений	2	1	1	1		3
1.3	Элементарные методы решения систем уравнений	2	1	1	1		3
1.4	Методы алгебраически х преобразован ий при решении систем уравнений	2	1	1	1		3
1.5	Определения, свойства, приемы вычисления аркфункций	2	1	1	1		3
1.6	Методы решения уравнений и неравенств, содержащих аркфункции	2	1	1	1		3
1.7	Применение областей определения и значения входящих функций	2	1	1	1		3
1.8	Применение монотонности	2	1	1	1		3

№ п/п	Наименование разделов (модулей) и тем	Всего аудиторных часов	Аудиторные виды учебных занятий, учебных работ		Внеаудиторные виды учебных занятий, учебных работ.	Форма контроля	Трудоемкость
			Лекционные занятия	Практические занятия	Самостоятельная работа		
1.9	Применение опорных неравенств. Решение функциональных уравнений	3	1	2	1	Тест 1 Практическая работа №1	4
2	Методические аспекты обучения методам решения уравнений на уровне среднего общего образования	4	1	3	4		8
2.1	Основные затруднения обучающихся при освоении различных методов решения уравнений	2	1	1	2		4
2.2	Методические основы обучения решению уравнений на уровне среднего общего образования	2	0	2	2	Практическая работа №2	4
	Итоговая аттестация					Зачет по совокупности выполненных практических работ №№1-2 и теста №1	
	Итого	23	10	13	13		36

2.2. Календарный учебный график

Наименование раздела, темы	Объём нагрузки	Неделя 1	Неделя 2	Неделя 3	Неделя 4	Неделя 5	Неделя 6
1.1 Метод замены переменной	3	3					
1.2 Методы решения иррациональных уравнений	3	3					
1.3 Элементарные методы решения систем уравнений	3		3				
1.4 Методы алгебраических преобразований при решении систем уравнений	3		3				
1.5 Определения, свойства, приемы вычисления аркфункций	3			3			
1.6 Методы решения уравнений и неравенств, содержащих аркфункции	3			3			
1.7 Применение областей определения и значения входящих функций	3				3		
1.8 Применение монотонности	3				3		
1.9 Применение опорных неравенств. Решение функциональных уравнений	4					4	
2.1 Основные затруднения обучающихся при освоении различных методов решения уравнений	4					2	2
2.2 Методические основы обучения решению уравнений на уровне среднего общего образования	4						4

2.3. Рабочая программа

	Виды учебных занятий, учебных работ, час.	Содержание
<i>1. Решение уравнений курса математики на уровне среднего общего образования</i>		
Тема 1.1 Метод замены переменной	Лекция - 1 час	Основные виды уравнений в курсе математики на уровне среднего общего образования. Области применения различных методов решения уравнений. Алгоритм выбора способа решения уравнения. Способы реализации метода замены переменной при решении уравнений
	Практическое занятие – 1 час	Практическая отработка способов реализации метода замены переменной

		при решении уравнений
	Самостоятельная работа – 1 час	Отработка способов реализации метода замены переменной при решении уравнений
Тема 1.2 Методы решения иррациональных уравнений	Лекция - 1 час	Основные виды уравнений в курсе математики на уровне среднего общего образования. Области применения различных методов решения уравнений. Алгоритм выбора способа и решения уравнения. Методы решения иррациональных уравнений. Способы реализации при решении иррациональных уравнений
	Практическое занятие – 1 час	Практическая отработка методов решения иррациональных уравнений. Способы реализации при решении иррациональных уравнений
	Самостоятельная работа – 1 час	Отработка методов решения иррациональных уравнений. Способы реализации при решении иррациональных уравнений
Тема 1.3 Элементарные методы решения систем уравнений	Лекция -1 час	Основные виды уравнений в курсе математики на уровне среднего общего образования. Области применения различных методов решения уравнений. Алгоритм выбора способа решения уравнения. Методы решения систем нелинейных уравнений
	Практическое занятие – 1 час	Практическая отработка методов решения систем нелинейных уравнений
	Самостоятельная работа – 1 час	Отработка методов решения систем нелинейных уравнений
Тема 1.4 Методы алгебраических преобразований при решении систем уравнений	Лекция - 1 час	Основные виды уравнений в курсе математики на уровне среднего общего образования. Области применения различных методов решения уравнений. Алгоритм выбора способа и решения уравнения. Методы алгебраических преобразований (деления и умножения), замены переменной, векторный, функциональный
	Практическое занятие – 1 час	Практическая отработка методов алгебраических преобразований (деления и умножения), замены переменной, векторный, функциональный
	Самостоятельная работа – 1 час	Отработка методов алгебраических преобразований (деления и умножения), замены переменной, векторный, функциональный
Тема 1.5 Определения, свойства, приемы вычисления аркфункций	Лекция - 1 час	Основные виды уравнений в курсе математики на уровне среднего общего образования. Области применения различных методов решения уравнений.

		Алгоритм выбора способа решения уравнения. Понятие обратимости функций, обратные функции, свойства взаимно-обратных функций, приемы вычисления
	Практическое занятие – 1 час	Практическая отработка приёмов вычисления аркфункций
	Самостоятельная работа – 1 час	Отработка приёмов вычисления аркфункций
Тема 1.6 Методы решения уравнений и неравенств, содержащих аркфункции	Лекция - 1 час	Основные виды уравнений в курсе математики на уровне среднего общего образования. Области применения различных методов решения уравнений. Алгоритм выбора способа решения уравнения. Методы решения уравнений и неравенств, содержащих аркфункции
	Практическое занятие - 1 час	Практическая отработка методов решения уравнений и неравенств, содержащих аркфункции
	Самостоятельная работа - 1 час	Отработка методов решения уравнений и неравенств, содержащих аркфункции
Тема 1.7 Применение областей определения и значения входящих функций	Лекция - 1 час	Основные виды уравнений в курсе математики на уровне среднего общего образования. Области применения различных методов решения уравнений. Алгоритм выбора способа решения уравнения. Систематизация некоторых свойств функций и применение теорем о корне
	Практическое занятие - 1 час	Практическая отработка применения теорем о корне
	Самостоятельная работа - 1 час	Отработка применения теорем о корне
Тема 1.8 Применение монотонности	Лекция - 1 час	Основные виды уравнений в курсе математики на уровне среднего общего образования. Области применения различных методов решения уравнений. Алгоритм выбора способа решения уравнения. Применение монотонности функций при решении уравнений и неравенств
	Практическое занятие - 1 час	Практическая отработка применения монотонности функций при решении уравнений и неравенств
	Самостоятельная работа - 1 час	Отработка применения монотонности функций при решении уравнений и неравенств
Тема 1.9 Применение опорных неравенств. Решение функциональных уравнений.	Лекция - 1 час	Основные виды уравнений в курсе математики на уровне среднего общего образования. Области применения различных методов решения уравнений. Алгоритм выбора способа и решения уравнения. Использование неравенств Коши, Коши-

		Буняковского, неравенство о среднем квадратичном и функциональных уравнений. Алгоритм решения уравнений курса математики на уровне среднего общего образования с использованием заданного или оптимального метода
	Практическое занятие - 1 час	Практическая отработка использования неравенств Коши, Коши-Буняковского, неравенство о среднем квадратичном и функциональных уравнений
	Самостоятельная работа - 1 час	Отработка использования неравенств Коши, Коши-Буняковского, неравенство о среднем квадратичном и функциональных уравнений. Выполнение Теста №1 по темам 1.1. - 1.9.
	Практическое занятие - 1 час	Практическая работа №1. Решение уравнений курса математики на уровне среднего общего образования с использованием заданного или оптимального метода
2. Методические аспекты обучения методам решения уравнений на уровне среднего общего образования		
Тема 2.1. Основные затруднения обучающихся при освоении различных методов решения уравнений	Лекция - 1 час	Содержание основных и дополнительных образовательных программ, учебных материалов и пособий по математике. Основные затруднения при освоении различных методов решения уравнений и способы их преодоления. Методические аспекты обучения различным методам решения уравнений в программе курса математики среднего общего образования. Алгоритм разработки элемента урока по математике направленного на решение уравнений оптимальным или заданным способом
	Практическое занятие - 1 час	Решение практико-ориентированных заданий по диагностике и выбору оптимальной стратегии устранения затруднений обучающихся
	Самостоятельная работа - 2 часа	Анализ и самостоятельное решение заданий по диагностике и выбору оптимальной стратегии устранения затруднений обучающихся
Тема 2.2. Методические основы обучения решению уравнений на уровне среднего общего образования	Практическое занятие – 1 час	Анализ содержания основных и дополнительных образовательных программ, учебных материалов и пособий по математике. Анализ методической литературы по математике в области решения уравнений на уровне среднего общего образования.
	Самостоятельная	Анализ методических аспектов

	работа - 2 часа	обучения различным методам решения уравнений в программе курса математики среднего общего образования. Анализ и сравнение основных источников и ресурсов по теме «решение уравнений», освоение навыков поиска, адаптации и разработки материалов к урокам по теме «решение уравнений». Анализ и разработка компонентов урока по математике в области решения уравнений оптимальным или заданным способом
	Практическое занятие - 1 час	Практическая работа №2. Разработка элемента урока по математике направленного на решение уравнений оптимальным или заданным способом
Итоговая аттестация		Зачет на основе совокупности выполненных практических работ №№1-2 и Теста №1

Раздел 3. «Формы аттестации и оценочные материалы»

Программой предусмотрена текущая и итоговая аттестация.

3.1. Текущая аттестация.

Текущая аттестация включает в себя две практические работы и тест.

Практическая работа №1. Решение уравнений курса математики на уровне среднего общего образования с использованием заданного или оптимального метода.

Задание №1

Решите оптимальным методом:

- $18x^4 + 3x^3 - 16x^2 + x + 2 = 0.$
- $\sqrt[3]{3-x} + \sqrt[3]{x+6} = 3.$
- $x(x+3)(x+5)(x+8) = 100.$
- $\frac{x^2-12x+15}{x^2-6x+15} = \frac{4x}{x^2-10x+15}.$
- $x^2 + \left(\frac{x}{2x-1}\right)^2 = 2.$
- $2\left(\frac{x-1}{x+2}\right)^2 - \left(\frac{x+1}{x-2}\right)^2 = \frac{x^2-1}{x^2-4}.$
- $\sqrt{\frac{1-|x|}{2}} = 2x^2 - 1.$
- $(8x^2 - 3x + 1)^2 + 12x = 32x^2 + 1$

$$9. (3x - 2)(6x - 1)(x + 14)(2x + 7) + 65x^2 = 0.$$

$$10. (x + 4)^4 + (x + 10)^4 = 162.$$

Задание №2

Решите системы уравнений:

$$1) \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^2 + y = 3 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} 10x^2 + 5y^2 - 2xy - 38x - 6y + 41 = 0 \\ 3x^2 - 2y^2 + 5xy - 17x - 6y + 20 = 0 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \sqrt{\frac{20y}{x}} = \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} \\ \sqrt{\frac{16x}{5y}} = \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y} \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} + \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \frac{65}{8} \\ x + y = 34 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 2x^2 - xy - y^2 = 0 \\ x^2 + y^2 + 3y - x = 4 \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} x^3 + y^3 = 7 \\ x^3 y^3 = -8 \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} x - 2y + 3z = 15 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 16 \end{cases}$$

$$8) \begin{cases} \left| y + \frac{1}{x} \right| + \left| \frac{13}{6} + x - y \right| = \frac{13}{6} + x + \frac{1}{x} \\ x^2 + y^2 = \frac{97}{36}, \text{ если } x < 0, y > 0 \end{cases}$$

Задание №3

Решите оптимальным методом, объяснив свой выбор:

$$1) (13x^2 + 2x - 14) \arccos x = 0 ;$$

$$2) 2 \arcsin(3 \sin 4x - 4) = -8x ;$$

$$3) 6 \cos(\arccos(x - 4)) = \sqrt{36x^2 - 72} ;$$

$$4) \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 4x) = 12 - 4x ;$$

$$5) \operatorname{arctg} x \cdot \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi^2}{18} ;$$

$$6) \arccos(3x - 16) = \arccos(x^2 - 26) ;$$

$$7) \arccos \frac{5 + 3 \cos 2x - 7 \sin x}{7\sqrt{2}} = x + \frac{\pi}{4} ;$$

$$8) \arcsin x + \arcsin \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2};$$

Задание №4

Решите уравнения:

$$1 \quad \cos x + 3 \sin \frac{x}{4} = 4$$

$$2 \quad 0,2^{x+1} = \sqrt{35+5x}$$

$$3 \quad \frac{3}{\pi} \arccos(x-1) = 3 + \sqrt{x^4 - 4x^3 + 4x^2}$$

$$4 \quad \sqrt[4]{x^5 - 3x^3 + 8} + \sqrt{\lg(x^2 - x - 5)} = 0$$

$$5 \quad \left(2 + \sqrt{x^2 - 7x + 12}\right) \left(\frac{2}{x} - 1\right) \leq \left(\sqrt{14x - 2x^2 - 24} + 2\right) \log_x \frac{2}{x}$$

$$6 \quad \sqrt{2-x-x^2} + 2\sqrt{x^2-2x-8} - \sqrt{x+11} = -3$$

$$7 \quad \frac{(2 \cos(10x - \frac{2\pi}{3}) - 4 \cos(5x - \frac{\pi}{3}) + 3}{\pi - 2 \arcsin \frac{x}{2}} + \left| \sin \frac{15x}{4} \right| \leq 0$$

$$8 \quad \sqrt{\frac{x^2 - 22x + 121}{x^2 - 24x + 140}} \geq 50x - 2x^2 - 309$$

$$9 \quad \begin{cases} (2x-1)^2 + 8\sqrt{2xy} = 4 \\ 4y - \sqrt{8xy-1} = 1 \end{cases}$$

$$10 \quad \frac{6-3^{x+1}}{x} > \frac{10}{2x-1}$$

Требования к выполнению практической работы:

- оптимальность выбранного метода;
- корректный ответ;
- корректность оформления решения (соответствие оформления представленного решения требованиям, предъявляемым к обучающимся 10-11 классов, рассмотренные в рамках лекционных занятий).

Критерии оценивания: слушатели получают зачет, если практическая работа выполнена с учетом всех требований.

Оценивание: зачет/незачет.

Практическая работа №2. Разработка элемента урока по математике направленного на решение уравнений оптимальным или заданным способом.

Требования к выполнению практической работы:

- соответствие заданной теме;
- использование ранее подобранного/разработанного дидактического материала;
- обоснованное использование научных терминов;
- работа выполнена шрифтом Times New Roman, 12 кегль, междустрочный интервал - 1,5. Нумерация страниц – верхний правый угол

Критерии оценивания: слушатели получают зачет, если практическая работа выполнена с учетом всех требований.

Оценивание: зачет/незачет.

Тест №1

Примерные вопросы теста:

Вопрос №1

Что относится к производным тригонометрическим функциям?

- косеканс
- синус
- **тангенс**
- арксинус

Вопрос №2

Какой буквой при оформлении задачи обозначается длина дуги?

- R -
- A -
- V -
- **C**

Вопрос №3

Функция задана формулой $f(x) = -3x^2 + 2x + 5$. Найдите $f(-3)$

- -16
- **-28**
- 26
- 28.

Критерии оценивания: тест содержит 10 вопросов. Каждый корректный ответ оценивается в 1 балл. Зачёт - 6 баллов и выше. Максимальное количество баллов 10.

Оценивание: зачет/незачет.

3.2. Итоговая аттестация

Зачёт по совокупности выполнения теста №1 и практических работ №№1-2.

Оценивание: зачёт / не зачёт.

Раздел 4. «Организационно-педагогические условия реализации программы»

4.1. Учебно-методическое обеспечение и информационное обеспечение программы

Нормативно-правовые документы

1. [Федеральный закон от 29 декабря 2012 г. N 273-ФЗ](#) «Об образовании в Российской Федерации».
2. [Приказ Министерства труда и социальной защиты РФ от 18 октября 2013 г. N 544н](#) «Об утверждении профессионального стандарта "Педагог (педагогическая деятельность в сфере дошкольного, начального общего, основного общего, среднего общего образования) (воспитатель, учитель)" (с изменениями и дополнениями)
3. [Приказ Министерства просвещения РФ от 31 мая 2021 г. № 287](#) «Об утверждении федерального государственного образовательного стандарта основного общего образования»
4. [Приказ Министерства образования и науки РФ от 17 мая 2012 г. N 413](#) «Об утверждении федерального государственного образовательного стандарта среднего общего образования»
5. [Приказ Министерства просвещения РФ от 12.08.2022 N 732](#) «О внесении изменений в федеральный государственный образовательный стандарт среднего общего образования, утвержденный приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 17 мая 2012 г. N 413»
6. [Приказ Министерства просвещения Российской Федерации от 18.05.2023 № 370](#) «Об утверждении федеральной образовательной программы основного общего образования»
7. [Приказ Министерства просвещения Российской Федерации от 18.05.2023 № 371](#) «Об утверждении федеральной образовательной программы среднего общего образования»

Основная литература

1. Снегурова В.И. Методика обучения математике: учебник для вузов / Н. С. Подходова [и др.]; под редакцией Н. С. Подходовой, В. И. Снегуровой. — Москва: Издательство Юрайт, 2024. — 566 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-11347-1.
2. Снегурова В.И. Методика обучения математике: учебник для вузов / Н. С. Подходова [и др.]; под редакцией Н. С. Подходовой, В. И. Снегуровой. — Москва: Издательство Юрайт, 2024. — 566 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-11347-1.

Дополнительная литература

1. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений первого и высших порядков [Электронный ресурс]. - Самара: Самарский университет, 2021. - 64 с.. - Рекомендовано редакционно-издательским советом федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Самарский национальный

исследовательский университет имени академика С. П. Королева» в качестве учебного пособия для обучающихся по основной образовательной программе высшего образования по направлению подготовки 15.03.01 Машиностроение. - Книга из коллекции Самарский университет - Математика. - На рус. яз. - ISBN 978-5-7883-1673-4.

2. Решение систем дифференциальных уравнений [Электронный ресурс]: учебно-методическое пособие. - Москва: РТУ МИРЭА, 2020. - 82 с.. - Книга из коллекции РТУ МИРЭА - Математика. - На рус. яз.

4.2. Материально-технические условия реализации программы

Слушатели используют личное оборудование, компьютер с подключением к сети интернет и перечнем программного обеспечения в соответствии с технической спецификацией размещённой в СДО ИнфоДа (<https://dro.mpgu.su/>)

4.3. Кадровые условия реализации программы

Реализацию программы обеспечивают специалисты Института математики и информатики ФГБОУ ВО МПГУ. Требования к квалификации кадров, обеспечивающих реализацию дополнительной профессиональной программы: наличие высшего педагогического образования, опыт работы не менее 3 лет в сфере ВО, наличие ученой степени.