

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования

”НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
”ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ“

УТВЕРЖДАЮ

Заместитель первого проректора НИУ ВШЭ



Г.В. Можаяева

6 августа 2024 года.

Дополнительная профессиональная программа
(повышение квалификации)

Вероятность и статистика в основной и средней школе

Разработчик:

Н.В. Походня

Москва, 2024

Раздел 1. Характеристика программы

1.1 Цель реализации программы – совершенствование профессиональных компетенций слушателей в области теории вероятностей и статистики и особенностей решения задач в рамках реализации ФГОС ООО, ФГОС СОО

1.1. Совершенствуемые компетенции

№ п/п	Компетенции	Направление подготовки 44.03.01 Педагогическое образование
		Код компетенции
1.	Способен осуществлять контроль и оценку формирования результатов образования обучающихся, выявлять и корректировать трудности в обучении	ОПК-5

1.2. Планируемые результаты обучения

№ п/п	Знать – уметь	Направление подготовки 44.03.01 Педагогическое образование
		Код компетенции
	Уметь: решать типовые и повышенного уровня задачи из разделов теории вероятностей и статистики для выявления возможных трудностей в обучении и их корректировки в рамках реализации ФГОС ООО, ФГОС СОО Знать: алгоритмы и стратегии решения типовых и повышенного уровня задач из разделов теории вероятностей и статистики для выявления возможных трудностей в обучении и их корректировки в рамках реализации ФГОС ООО, ФГОС СОО	ОПК – 5
	Уметь: составлять системы заданий, дифференцированных по уровням сложности по темам теории вероятностей и статистики для обучения, оценивания учащихся профильных классов	ОПК – 5

	Знать: стратегии составления систем заданий, дифференцированных по уровням сложности по темам теории вероятностей и статистики для обучения, оценивания учащихся профильных классов	
--	--	--

1.3. Категории обучающихся: уровень образования – высшее образование, область профессиональной деятельности – обучение математике в профильных классах на уровне основного общего, среднего общего образования в рамках проекта ДОНМ «Математическая вертикаль»

1.4. Форма обучения: очная, с применением ДОТ.

1.5. Трудоемкость программы: 72 часа.

1.6. Режим занятий: продолжительность одного занятия составляет 2 академических часа, количество занятий в неделю: 2-3 занятия.

Раздел 2. Содержание программы

2.1. Учебный план

№ п/п	Наименование разделов (модулей) и тем	Аудиторные учебные занятия, учебные работы			Внеаудиторная работа	Формы контроля	Трудоемкость
		Всего ауд. часов	Лекции	Практические занятия	Самостоятельная работа		
1	Раздел 1 Основные положения теории вероятностей и особенности решения задач на уровнях	20	12	8	16		36

	основного общего и среднего общего образования						
1.1	Курс «Вероятность и статистика»: основные положения теории вероятностей	2	2				2
1.2	Теория вероятностей: случайные опыты и случайные события	6	4	2	4		10
1.3	Теория вероятностей: опыты с равновероятными элементарными исходами	4	2	2	4	Практическая работа № 1	8
1.4	Теория вероятностей: условная вероятность, независимость событий, испытаний	4	2	2	4		8
1.5	Серии независимых испытаний	4	2	2	4	Практическая работа № 2	8
2.	Раздел 2. Теория вероятностей как основание статистики: особенности решения задач на уровнях основного общего и среднего общего образования	12	6	6	15		27
2.1	Случайные величины и закон больших чисел	4	2	2	5		9
2.2	Статистические оценки и проверка гипотез	4	2	2	5		9
2.3	Дискретные случайные величины	4	2	2	5	Практическая работа № 3	9
3.	Раздел 3. Составление систем заданий по темам теории вероятностей и статистики	4	2	2	5		9
3.1.	Тема 3.1. Особенности составления систем заданий по темам теории вероятностей и	4	2	2	5	Практическая работа № 4	9

	статистики						
3.	Итоговая аттестация					Зачет по совокупности практических работ №№ 1–4, выполненных на положительные оценки	
	Итого	36	20	16	36		72

2.2. Календарный учебный график

Наименование раздела, темы	Объем нагрузки	Учебные недели							
		1 неделя	2 неделя	3 неделя	4 неделя	5 неделя	6 неделя	7 неделя	8 неделя
Тема 1.1. Курс «Вероятность и статистика»: основные положения теории вероятностей	2	2							
Тема 1.2. Теория вероятностей: случайные опыты и случайные события	10	6	4						
Тема 1.3. Теория вероятностей: опыты с равновозможными элементарными исходами	8		4	4					
Тема 1.4. Теория вероятностей: условная вероятность, независимость событий, испытаний	8			4	4				
Тема 1.5. Серии независимых испытаний	8				4	4			
Тема 2.1. Случайные величины и закон больших чисел	9					9			

2.3. Учебная программа

Наименование разделов/модулей, тем	Виды учебных занятий	Содержание
Раздел 1 Основные положения теории вероятностей и особенности решения задач на уровнях основного общего и среднего общего образования		
Тема 1.1. Курс «Вероятность и статистика»: основные положения теории вероятностей	Лекция, 2 часа	Основные принципы построения курса «Вероятность и статистика» с учетом требований, обновленных ФГОС ООО, ФГОС СОО. Основные положения теории вероятностей в школьном курсе «Вероятность и статистика»
Тема 1.2. Теория вероятностей: случайные опыты и случайные события	Лекция, 4 часа	Основные понятия. Случайные эксперименты, формирование представления о случайной изменчивости. Случайные события. Элементарные события. Сложные события. Классификации различных типов задач на нахождение вероятностей событий. Критерии определения уровня сложности заданий на нахождение вероятностей событий. Характерные ошибки, допускаемые учащимися. Алгоритмы и стратегии решения задач различного уровня сложности по теме «Случайные события».
	Практическое занятие, 2 часа	Работа в малых группах. Тренинг № 1 1. Определение типов задач и уровня их сложности по теме «Случайные события» 2. Решение задач по теме «Случайные события» (с учетом 1 задания). 3. Выявление возможных трудностей в обучении при решении задач по теме «Случайные события» (с учетом 1, 2 заданий).
	Самостоятельная работа, 4 часа	Отработка умений решения задач по теме «Случайные события»
Тема 1.3. Теория вероятностей: опыты с	Лекция, 2 часа	Вероятности событий в опытах с равновероятными исходами. Элементы теории графов и их

равновозможными элементарными исходами		применение для решения задач. Классификации различных типов задач на нахождение вероятностей событий в опытах с равновозможными исходами и критерии определения уровня сложности. Характерные ошибки, допускаемые учащимися. Алгоритмы и стратегии решения задач различного уровня сложности на нахождение вероятностей событий в опытах с равновозможными исходами.
	Практическое занятие, 2 часа	Работа в малых группах. Тренинг № 2 1. Определение типов задач на нахождение вероятностей событий в опытах с равновозможными исходами и уровня их сложности. 2. Решение задач на нахождение вероятностей событий в опытах с равновозможными исходами (с учетом 1 задания). 3. Выявление возможных трудностей в обучении при решении задач на нахождение вероятностей событий в опытах с равновозможными исходами (с учетом 1 и 2 задания).
	Самостоятельная работа, 4 часа	Практическая работа № 1 (задания выдает преподаватель) 1. Решение задач различного уровня сложности по темам «Случайные события» и «Опыты с равновозможными элементарными» 2. Выявление возможных трудностей в обучении при решении задач по темам «Случайные события» и «Опыты с равновозможными элементарными» (с учетом 1 задания).
Тема 1.4. Теория вероятностей: условная вероятность, независимость событий, испытаний	Лекция, 2 часа	Основные понятия. Условная вероятность. Независимые события, Независимые испытания. Метод дерева событий. Сложение и умножение вероятностей. Классификации различных типов задач на тему условная вероятность и независимость событий. Критерии уровня сложности

		заданий. Алгоритмы и стратегии решения задач различного уровня сложности на темы условная вероятность, независимость событий, независимость испытаний. Характерные ошибки, допускаемые учащимися.
	Практическое занятие, 2 часа	Работа в малых группах. Тренинг № 3 1. Определение типов задач на темы условная вероятность, независимость событий, независимость испытаний и уровня их сложности. 2. Решение задач на темы условная вероятность, независимость событий, независимость испытаний (с учетом 1 задания). 3. Выявление возможных трудностей в обучении при решении задач на темы условная вероятность, независимость событий, независимость испытаний (с учетом 1 и 2 задания).
	Самостоятельная работа, 4 часа	Отработка умений решения задач по темам условная вероятность, независимость событий, испытаний
Тема 1.5. Серии независимых испытаний	Лекция, 2 часа	Формула полной вероятности и теорема Байеса. Формула Бернулли. Нахождение вероятностей успехов в серии независимых испытаний Бернулли. Особенности и стратегии составления систем заданий, дифференцированных по уровням сложности по темам теории вероятностей для обучения, оценивания учащихся профильных классов
	Практическая работа, 2 часа	Работа в малых группах. Тренинг № 4 1. Решение задач различного уровня сложности на нахождение условной вероятности в серии независимых событий. 2. Выявление возможных

		<p>трудностей в обучении при решении задач на нахождение условной вероятности в серии независимых событий (с учетом 1 задания).</p>
	<p>Самостоятельная работа, 4 часа</p>	<p>Практическая работа № 2 (задания выдает преподаватель)</p> <p>1. Решение задач различного уровня сложности по темам условная вероятность, независимость событий, испытаний и условная вероятность в серии независимых событий.</p> <p>2. Выявление возможных трудностей в обучении при решении задач по темам условная вероятность, независимость событий, испытаний и условная вероятность в серии независимых событий (с учетом 1 задания).</p>
<p>Раздел 2. Теория вероятностей как основание статистики: особенности решения задач на уровнях основного общего и среднего общего образования</p>		
<p>Тема 2.1. Случайные величины и закон больших чисел</p>	<p>Лекция, 2 часа</p>	<p>Случайная величина и распределение вероятностей. Операции над случайными величинами. Геометрическое и биномиальное распределения. Математическое ожидание случайной величины. Совместное распределение двух случайных величин. Независимые случайные величины. Свойства математического ожидания. Дисперсия и стандартное отклонение. Свойства дисперсии. Дисперсия бинарной случайной величины. Понятие о законе больших чисел. Классификации различных типов задач на нахождение характеристик распределения случайных величин, распределения дискретных случайных величин, нахождение характеристик распределения дискретных случайных величин и др. Критерии определения уровня сложности заданий. Характерные ошибки, допускаемые учащимися. Алгоритмы и стратегии решения задач различного уровня</p>

		<p>сложности на нахождение характеристик распределения случайных величин, распределения дискретных случайных величин, нахождение характеристик распределения дискретных случайных величин и др.</p>
	<p>Практическое занятие, 2 часа</p>	<p>Работа в малых группах. Тренинг № 5</p> <p>1. Определение типов задач и уровня их сложности на рассмотренные темы.</p> <p>2. Решение задач на рассмотренные темы (с учетом 1 задания).</p> <p>3. Выявление возможных трудностей в обучении при решении задач на рассмотренные темы (с учетом 1 и 2 задания).</p>
	<p>Самостоятельная работа, 5 часов</p>	<p>Отработка умений решения задач по теме «Случайные величины и закон больших чисел»</p>
<p>Тема 2.2. Статистические оценки и проверка гипотез</p>	<p>Лекция, 2 часа</p>	<p>Генеральная совокупность и случайная выборка. Знакомство с выборочными характеристиками. Оценка среднего генеральной совокупности по выборке. Оценка дисперсии генеральной совокупности по выборке. Оценивание вероятностей событий по выборке. Статистическая гипотеза. Проверка простейших гипотез. Классификации различных типов задач на нахождение выборочных характеристик, на проверку статистических гипотез и др. Критерии уровня сложности заданий. Характерные ошибки, допускаемые учащимися. Алгоритмы и стратегии решения задач различного уровня сложности на нахождение выборочных характеристик, на проверку статистических гипотез и др.</p>
	<p>Практическое занятие, 2 часа</p>	<p>Работа в малых группах. Тренинг № 6</p> <p>1. Определение типов задач и уровня их сложности на нахождение</p>

		<p>выборочных характеристик, на проверку статистических гипотез и др.</p> <p>2. Решение задач на рассмотренные темы (с учетом 1 задания).</p> <p>3. Выявление возможных трудностей в обучении при решении задач на нахождение выборочных характеристик, на проверку статистических гипотез и др. (с учетом 1 и 2 задания).</p>
	Самостоятельная работа, 5 часов	Отработка умений решения задач по теме «Статистические оценки и проверка гипотез»
Тема 2.3. Дискретные случайные величины	Лекция, 2 часа	<p>Неравенство и теорема Чебышева. Формулировка закона больших чисел для средних и частот. Теорема Пуассона. Измерение вероятностей. Классификации различных типов задач по теме «Дискретные случайные величины».</p> <p>Критерии определения уровня сложности заданий по теме «Дискретные случайные величины».</p> <p>Характерные ошибки, допускаемые учащимися. Алгоритмы и стратегии решения задач различного уровня сложности по теме «Дискретные случайные величины».</p>
	Практическое занятие, 2 часа	<p>Работа в малых группах.</p> <p>Тренинг № 7</p> <p>1. Определение типов задач и уровня их сложности по теме «Дискретные случайные величины».</p> <p>2. Решение задач по теме «Дискретные случайные величины» (с учетом 1 задания).</p> <p>3. Выявление возможных трудностей в обучении при решении задач по теме «Дискретные случайные величины» (с учетом 1 и 2 задания).</p>
	Самостоятельная работа, 5 часов	<p>Практическая работа № 3 (задания выдает преподаватель)</p> <p>1. Решение задач различного</p>

		уровня сложности по темам «Случайные величины и закон больших чисел», «Статистические оценки и проверка гипотез», и «Дискретные случайные величины» . 2. Выявление возможных трудностей в обучении при решении задач по темам. (с учетом 1 задания).
Раздел 3. Составление систем заданий по темам теории вероятностей и статистики		
Тема 3.1. Особенности составления систем заданий по темам теории вероятностей и статистики	Лекция, 2 часа	Особенности и стратегии составления систем заданий, дифференцированных по уровням сложности по темам теории вероятностей и статистики для обучения, оценивания учащихся профильных классов
	Практическая работа, 2 часа	Работа в малых группах. Тренинг № 8 (тему выдает преподаватель) Составление системы заданий, дифференцированных по уровням сложности для обучения, оценивания учащихся профильных классов по темам теории вероятностей и статистики.
	Самостоятельная работа, 5 часов	Практическая работа № 4 Составить систему заданий, дифференцированных по уровням сложности для обучения, оценивания учащихся профильных классов по темам теории вероятностей и статистики (тема по выбору обучающегося)
Итоговая аттестация		Зачет по совокупности практических работ №№ 1–4, выполненных на положительные оценки

Раздел 3. Формы аттестации и оценочные материалы

3.1. Формы текущего контроля

Практическая работа № 1

Задание в практической работе	1. Решение задач различного уровня сложности по темам «Случайные события» и «Опыты с равновероятными элементарными». 2. Выявление возможных трудностей в обучении при решении задач по темам «Случайные события» и «Опыты с равновероятными элементарными» (с учетом 1 задания).
Требования к структуре и содержанию	1. Решение заданий осуществляется с применением соответствующих алгоритмов и стратегий по темам «Случайные события» и «Опыты с равновероятными элементарными». 2. Выявление и корректировка возможных трудностей в обучении осуществляется с применением соответствующих стратегий.
Критерии оценивания	1. Правильно выбраны алгоритмы и стратегии для решения заданий практической работы. 2. Все шаги алгоритмов и стратегий выполнены верно и в полном объеме. 3. Верно решены не менее 3 из 5 заданий. 4. Определены шаги алгоритма/стратегии, в которых возможно возникновение трудностей реализации их учащимися
Оценка	Зачтено/не зачтено

Примеры заданий для практической работы № 1

1. В магазине канцтоваров 165 ручек, из них 37 красных, 16 зеленых, 46 фиолетовых, еще есть синие и черные. Найдите вероятность того, что при случайном выборе одной ручки будет выбрана синяя или черная ручка.

2. В одном городе любая улица соединяет либо две различные площади, либо площадь с тупиком, либо два тупика. С любой площади выходит ровно 5 улиц. Всего в городе 49 улиц. Какое наименьшее количество тупиков может быть?

3. Сергей получает паспорт. Последние три цифры номера паспорта случайные. Найдите вероятность того, что последние три цифры — это цифры 1, 2 и 3 в каком-то порядке.

Практическая работа № 2

Задание в практической работе	1. Решение задач различного уровня сложности по темам условная вероятность, независимость событий, испытаний и условная вероятность в серии независимых событий. 2. Выявление возможных трудностей в обучении при решении задач по темам условная вероятность, независимость событий, испытаний и условная вероятность в серии независимых событий (с учетом 1 задания).
Требования к структуре и содержанию	1. Решение заданий осуществляется с применением соответствующих алгоритмов и стратегий решения задач по данным темам. 2. Выявление и корректировка возможных трудностей в обучении осуществляется с применением соответствующих стратегий.
Критерии оценивания	1. Правильно выбраны алгоритмы и стратегии для решения заданий практической работы. 2. Все шаги алгоритмов и стратегий выполнены верно и в полном объеме. 3. Верно решены не менее 3 из 5 заданий.

	4. Определены шаги алгоритма/стратегии, в которых возможно возникновение трудностей реализации их учащимися
Оценка	Зачтено/не зачтено

Примеры заданий для практической работы № 2

1. Стрелок стреляет по мишени до первого попадания. Вероятность попадания при каждом отдельном выстреле равна $p = 0,2$. Какова вероятность того, что стрелку потребуется: а) ровно два выстрела; б) не больше пяти выстрелов?

2. В настольной игре нужно бросить два кубика и, если результаты бросков совпали, то игроку даётся некоторый бонус. Если всего игрок бросал кубики 120 раз игру, то сколько бонусов можно ожидать в среднем?

3. В кофейне одинаковые с виду пирожки упакованы в пластиковые контейнеры по две штуки в каждом. В двух контейнерах по два пирожка с яблоком, в трёх контейнерах по пирожку с яблоком и по пирожку с малиной, и в одном контейнере оба пирожка с малиной. Взяли случайный контейнер, и один из пирожков в нём оказался с яблоком. Какова вероятность того, что второй пирожок в этом контейнере тоже с яблоком?

Практическая работа № 3

Задание в практической работе	1. Решение задач различного уровня сложности по темам «Случайные величины и закон больших чисел», «Статистические оценки и проверка гипотез», и «Дискретные случайные величины». 2. Выявление возможных трудностей в обучении при решении задач по темам. (с учетом 1 задания).
Требования к структуре и содержанию	1. Решение заданий осуществляется с применением соответствующих алгоритмов и стратегий решения задач по данным темам. 2. Выявление и корректировка возможных трудностей в обучении осуществляется с применением соответствующих стратегий.
Критерии оценивания	1. Правильно выбраны алгоритмы и стратегии для решения заданий практической работы. 2. Все шаги алгоритмов и стратегий выполнены верно и в полном объеме. 3. Верно решены не менее 3 из 5 заданий. 4. Определены шаги алгоритма/стратегии, в которых возможно возникновение трудностей реализации их учащимися
Оценка	Зачтено/не зачтено

Примеры заданий для практической работы № 3

1. Канцелярскую кнопку бросают 10 раз. Вероятность выпадения ее шляпкой вниз равна 0,73. Напишите распределение случайной величины «число кнопок, упавших шляпкой вниз».

2. В каждом Киндер-сюрпризе с равными шансами может встретиться одна из шести принцесс. Соня решила во что бы то ни стало собрать всю коллекцию. Сколько ей придется купить шоколадных яиц? Опишите случайную величину, найдите функцию и плотность распределения, математическое ожидание и дисперсию этой величины.

3. В зрительном зале театра в ряду n кресел, но проход ко всем этим креслам только с одной стороны. Если некто занял свое место, а затем другому зрителю нужно пройти дальше, то первому придется встать. Считая, что все n зрителей, имеющих билеты на эти места, приходят в случайном порядке, найдите распределение и математическое ожидание случайной величины:

а) «Число вставаний, необходимых для того, чтобы все заняли свои места»;

б) «Количество зрителей, которым не придется вставать ни разу»

Практическая работа № 4

Задание в практической работе	в	Составить систему заданий, дифференцированных по уровням сложности для обучения, оценивания учащихся профильных классов по темам теории вероятностей и статистика (тема по выбору обучающегося)
Требования к структуре содержанию	к и	Работа осуществляется на основании стратегии составления систем заданий, дифференцированных по уровням сложности по темам теории вероятностей и статистика для обучения, оценивания учащихся профильных классов
Критерии оценивания		1. Все шаги стратегии выполнены верно и в полном объеме. 2. Система заданий дифференцирована по уровням сложности и охватывает весь спектр возможных заданий для выбранной темы. 3. Задания соответствуют возрастным особенностям обучающихся и уровню обучения. 4. Задания выстроены так, что позволяют выявить возможные трудности в обучении
Оценка		Зачтено/не зачтено

3.1.2. Требования к оформлению и выполнению практических работ №№ 1-4

Практические работы выполняются слушателем на листах формата А4. Практическая работа содержит 5 заданий, соответствующих заданиям рассмотренных тем. Решение заданий практической работы должно быть

развернутым, т.е. полным и обоснованным. При необходимости слушатель может сопровождать аналитическое решение графическими комментариями.

3.2. Итоговая аттестация: зачет по совокупности выполненных практических работ №№ 1– 4 выполненных на положительные оценки

Раздел 4. Организационно-педагогические условия реализации программы

4.1. Учебно-методическое и информационное обеспечение программы

4.1.1. Основная литература

Высоцкий И.Р., Макаров А.А., Тюрин Ю.Н., Яценко И.В.; под редакцией Яценко И. В. Теория вероятностей и статистика. 7-9 классы. – Москва: Просвещение, 2020 г. 272 стр.

4.1.2. Дополнительная литература

Высоцкий, И.Р. Теория вероятностей. Задачи и контрольные работы. 10 класс / И. Р. Высоцкий. - М.: МЦНМО, 2019. - 101 с.

4.1.3. Интернет-ресурсы:

1. База задач: <https://ptlab.mccme.ru/node/266>

4.2. Материально-технические условия реализации программы

Для проведения очных занятий используется учебная аудитория 109 в здании факультета математики НИУ ВШЭ по адресу: Усачева ул., д. 6. Общая площадь аудитории не менее 60 кв.м, оснащена проектором и досками. Также для самостоятельной работы может быть использован компьютерный класс, оснащенный 30 персональными компьютерами с выходом в Интернет. На всей территории учебных помещений предоставляется свободный доступ в Интернет по сети wi-fi.

4.3. Кадровые условия реализации программы

Реализация программы обеспечивается сотрудниками университета, а также лицами, привлекаемыми на условиях договора гражданско-правового характера.

Программу реализуют:

1. П.В. Семенов, профессор факультета математики НИУ ВШЭ, д. ф.-м. н.
2. И.Р. Высоцкий, приглашенный преподаватель, руководитель лаборатории теории вероятностей Московского центра непрерывного математического образования