

ДЕПАРТАМЕНТ ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ ГОРОДА МОСКВЫ
Государственное автономное образовательное учреждение
дополнительного профессионального образования города Москвы
«МОСКОВСКИЙ ЦЕНТР КАЧЕСТВА ОБРАЗОВАНИЯ»



СОГЛАСОВАНО

Начальник управления
государственного надзора и контроля в
сфере образования Департамента
образования и науки города Москвы

 И.В. Гуськов

« ____ » _____ 2019 г.

УТВЕРЖДАЮ

Зам. директора ГАОУ ДПО МЦКО

 П.Л. Лепе

« ____ » _____ 2019 г.

**Дополнительная профессиональная программа
(повышение квалификации)**

**Подготовка экспертов для работы в предметной комиссии при проведении
государственной итоговой аттестации по образовательным программам среднего
общего образования (ГИА-11) по математике в 2020 году**
(для экспертов с опытом работы в предметной комиссии не более 2-х лет)

Рег. номер 15

Разработчики курса:

М.А. Черняева,

И.В. Ященко,

А.В. Семенов,

Л.Б. Крайнева

Раздел 1. «Характеристика программы»

1.1. Цель реализации программы

Формирование профессиональных компетенций слушателей в области проверки и оценки выполнения заданий с развернутым ответом экзаменационных работ ГИА-11 по математике.

Формируемые компетенции

№ п/п	Компетенции	Направление подготовки Педагогическое образование
		Квалификация Магистратура
		Код компетенции 44.04.01
1.	Способен осуществлять и оптимизировать профессиональную деятельность в соответствии с нормативными правовыми актами в сфере образования и нормами профессиональной этики	ОПК-1

1.2. Планируемые результаты обучения

№ п/п	Знать – уметь	Направление подготовки Педагогическое образование
		Квалификация Магистратура
		Код компетенции 44.04.01
1.	Знать: – полномочия и функции членов предметной комиссии; – содержание нормативных документов, определяющих структуру и содержание контрольных измерительных материалов для проведения государственной итоговой аттестации (ГИА-11); – типологию заданий с развернутым ответом, используемых в КИМ ЕГЭ и ГВЭ по математике; – технологии объективной оценки образовательных достижений и критерии оценивания экзаменационных работ; – порядок проверки и оценки ответов участников экзамена на задания с развернутым ответом по математике. Уметь: – работать с инструкциями, регламентирующими процедуру проверки и оценки ответов участников экзамена на задания с развернутым ответом; – проверять и объективно оценивать ответы	ОПК-1

	участников экзамена на задания с развернутым ответом; – оформлять результаты проверки, соблюдая установленные требования.	
--	--	--

1.3. Категория обучающихся: уровень образования – ВО, направление подготовки – «Педагогическое образование», область профессиональной деятельности – обучение математике на уровне среднего общего образования.

Программа для слушателей без опыта работы в ПК / с опытом работы в ПК не более 2-х лет.

1.4. Форма обучения: очная с дистанционной поддержкой обучения.

1.5. Режим занятий, срок освоения программы: 4-6 часов в день.

1.6. Трудоемкость программы: 54 часа.

Раздел 2. «Содержание программы»

2.1. Учебный (тематический) план

№ п/ п	Наименование разделов (модулей) и тем	Аудиторные учебные занятия, учебные работы				Форма контр оля
		Всего ауд. час	Лекции	Практические занятия	Самостоя тельная работа	
1.	Теоретическая часть	12	2	10		
1.1	Нормативные правовые основы проведения ГИА-11	2	2			
1.2	Структура и содержание КИМ ГИА-11 по математике	4		4		тестир ование
1.3	Специфика оценки заданий с развернутым ответом по математике	6		6		
2.	Практическая часть	38		28	10	
2.1	Анализ результатов работы ПК ГИА-11 по математике	2		2		
2.2	Практикум по оцениванию заданий с развернутым ответом по математике	30		20	10	Практи ческие работы №№ 1- 5
2.3	Анализ согласованности проверки заданий с развернутым ответом по итогам практических работ	6		6		
3.	Итоговая аттестация	4		4		Зачет. Тести рован ие
	Итого:	54	2	42	10	

2.2. Учебная программа

№ п/п	Виды учебных занятий, учебных работ	Содержание
1. Теоретическая часть		
Тема 1.1 Нормативные правовые основы проведения ГИА-11	Лекция (2 ч.)	Нормативная правовая база при подготовке и проведении ГИА по программам среднего общего образования: федеральные, ведомственные и региональные, порядок проведения ГИА-11. Организация работы предметной комиссии ГИА-11: инструктивно-методические материалы и регламент работы ПК ГИА-11 на ППЗ. Квалификационные характеристики экспертов. Статусы экспертов ПК ГИА. Формирование и организация работы ПК. Требования к порядку работы эксперта ПК. Соблюдение Российского законодательства, соответствие принципам гуманизма и целесообразности. Профессионально-личностные качества эксперта.
Тема 1.2 Структура и содержание КИМ по математике	Практическое занятие (4 ч.)	Структура и содержание КИМ ГИА-11 в 2020 году по математике: кодификатор элементов содержания и требований к уровню подготовки обучающихся, спецификация КИМ, демонстрационный вариант КИМ ГИА-11 в 2020 году. Типы заданий ГИА-11 по математике, распределение заданий экзаменационной работы по проверяемым контрольным элементам содержания (КЭС). Структура и содержание КИМ ГВЭ в 2020 г.
Тема 1.3 Специфика оценки заданий с развернутым ответом по математике	Практическое занятие (6 ч.)	Система оценки выполнения заданий с развернутым ответом ЕГЭ по математике. Виды шкал, используемых для оценки выполнения каждого типа заданий с развернутым ответом по математике. Процедура проверки и оценки заданий с развернутым ответом в рамках проведения ЕГЭ: протокол проверки, методика назначения третьего эксперта. Процедура проверки и оценки заданий с развернутым ответом в рамках проведения ГВЭ: протокол проверки, методика назначения третьего эксперта.
2. Практическая часть		
Тема 2.1	Практическое	Итоги экзамена по математике в 2019

Анализ результатов работы ПК ГИА-11 по математике	занятие (2 ч.)	г.: анализ результатов работы предметной комиссии. Преодоление расхождения баллов в работе экспертов.
Тема 2.2 Практикум по оцениванию заданий с развернутым ответом по математике	Практическое занятие (4 ч.)	Анализ текста работы участника экзамена: выявление главного и существенного, выделение смысловых частей, аргументов. Интерпретация ответов участников экзамена: установление цели, логики и соответствия высказывания заданию. Распознавание повторов, определение возможности использования информации для ответа. Оценка переформатирования информации. Формулирование мотивированных суждений по тексту работы участника экзамена.
	Самостоятельная работа (2 ч.)	Выполнение практической работы № 1 (анализ решения работы выпускника на предмет неоднозначности оценивания какого-либо задания)
	Практическое занятие (4 ч.)	Проверка заданий № 13 и № 15. Критерии оценивания. Обоснование результатов проверки, выделение ошибок участников экзамена, аргументация и пояснение позиции эксперта. Способы разрешения проблемных ситуаций при проверке ответов участников экзамена.
	Самостоятельная работа (2 ч.)	Выполнение практической работы № 2 (отработка критериального оценивания заданий № 13 и № 15)
	Практическое занятие (4 ч.)	Проверка заданий № 14 и № 16. Критерии оценивания. Обоснование результатов проверки, выделение ошибок участников экзамена, аргументация и пояснение позиции эксперта. Способы разрешения проблемных ситуаций при проверке ответов участников экзамена.
	Самостоятельная работа (2 ч.)	Выполнение практической работы № 3 (отработка критериального оценивания заданий № 14 и № 16)
	Практическое занятие (4 ч.)	Проверка задания № 17. Критерии оценивания. Обоснование результатов проверки, выделение ошибок участников экзамена, аргументация и пояснение позиции

		эксперта. Способы разрешения проблемных ситуаций при проверке ответов участников экзамена.
	Самостоятельная работа (2 ч.)	Выполнение практической работы № 4 (отработка критериального оценивания задания № 17)
	Практическое занятие (4 ч.)	Проверка заданий № 18 и № 19. Критерии оценивания. Обоснование результатов проверки, выделение ошибок участников экзамена, аргументация и пояснение позиции эксперта. Способы разрешения проблемных ситуаций при проверке ответов участников экзамена.
Тема 2.3 Анализ согласованности проверки заданий с развернутым ответом по итогам практических работ	Самостоятельная работа (2 ч.)	Выполнение практической работы № 5 (отработка критериального оценивания заданий № 18 и № 19)
	Практическое занятие (6 ч.)	Обобщение результатов практических работ по проверке заданий с развернутым ответом. Проблемные ситуации при оценивании. Способы достижения единых подходов к проверке и оценке отдельных заданий и работы в целом. Порядок прохождения квалификационных испытаний на присвоение статуса эксперта ПК ГИА.
3. Итоговая аттестация	4 ч.	Зачет Тестирование

Раздел 3. «Формы аттестации и оценочные материалы»

3.1. Текущий контроль: практические работы №№ 1-5 – проверка и критериальное оценивание ответов на задания с развернутым ответом, оформление результатов проверки.

Материалы практических работ размещены в ИОС образовательной организации.

Практические работы №№ 1-5

Практическая работа № 1

Прочитайте работу выпускника. Отметьте номер задания, решение которого можно оценить двояко (разные эксперты могут оценить по-разному).

$$13 \quad a) \quad 2 \sin(x + \frac{\pi}{6}) - 2\sqrt{3} \cos^2 x = \cos x - 2\sqrt{3}$$

$$2(\sin x \cos \frac{\pi}{6} + \cos x \sin \frac{\pi}{6}) - 2\sqrt{3}(1 - \sin^2 x) = \cos x - 2\sqrt{3}$$

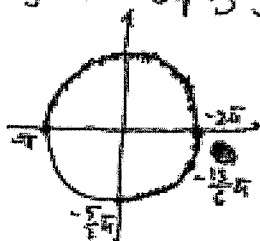
$$2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + 2 \cdot \frac{1}{2} \cos x - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} \sin^2 x = \cos x - 2\sqrt{3}$$

$$\sqrt{3} \sin x + 2\sqrt{3} \sin^2 x = 0$$

$$\sqrt{3} \sin x (1 + 2 \sin x) = 0$$

$$\begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin x = -\frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x = \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi m, m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

б) С помощью числовой окружности отберем корни, принадлежащие отрезку $[-\frac{\pi}{6}; \pi]$



$$-\frac{\pi}{6} = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi m = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n \quad \text{при } m=0$$

$$-\pi = \pi \cdot (-2) \quad n=-2$$

$$-\pi = \pi \cdot (-1) \quad n=-1$$

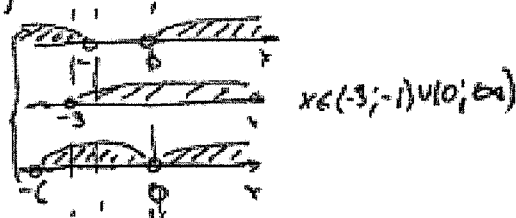
$$\text{Отв. а) } x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi m, m \in \mathbb{Z}$$

$$\text{б) } -\frac{\pi}{6}; -2\pi; -\pi$$

$$15 \quad \log_5 \left(\frac{2}{x+2} \right) - \log_5 (x+3) \leq \log_5 \left(\frac{x+6}{x^2} \right)$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} \frac{2}{x+2} > 0 \\ x+3 > 0 \\ \frac{x+6}{x^2} > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{x+1}{x} > 0 \\ x > -3 \\ \frac{x+6}{x^2} > 0 \end{cases}$$



Решение:

Преобразуем к ОДЗ

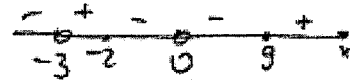
$$\log_5 \left(\frac{\frac{2}{x+2}}{x+3} \right) \leq \log_5 \left(\frac{x+6}{x^2} \right) \Leftrightarrow \log_5 \left(\frac{2}{x(x+3)} \right) - \log_5 \left(\frac{x+6}{x^2} \right) \leq 0$$

Учитывая, что функция $y = \log_5 x$ монотонно возрастает
приведем к виду

15. можно приравнять АЗМ и ОДЗ

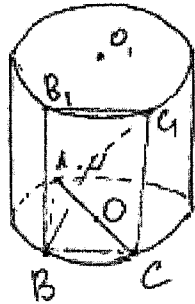
$$(5.1) \left(\frac{2+2x}{x(x+3)} - \frac{x+6}{x^2} \right) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2x+2x^2 - (x+6)(x+3)}{x^2(x+3)} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x^2-7x-18}{x^2(x+3)} \leq 0 \quad \frac{(x-9)(x+2)}{x^2(x+3)} \leq 0$$



$$x \in (-\infty; -3) \cup [-2; 0) \cup (0; 9] \quad \text{учитывая ОДЗ} \quad x \in [-2; -1) \cup (0; 9]$$

14



а) Докажем:

1) т.к. AC - диаметр $\angle ABC = 90^\circ$, тогда $\triangle ABC$ прямоугольный и $\angle BCA = 45^\circ \Rightarrow \angle CAB = 45^\circ$ и $AB = BC$ равнобедренный

2) проведем образующую BB_1 , тогда BB_1, CC_1 - параллельные т.к. образующие цилиндра и перпендикулярны BC и B_1C_1 , значит $\angle B_1CA$ - смежный

3) в $\triangle BB_1C_1$ и $\triangle CC_1A$ прямоугольные по той же причине, лежащей в $\triangle BAC$

$$AB_1 = \sqrt{AB^2 + BB_1^2} = 6 \text{ по теореме Пифагора}$$

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = AB\sqrt{2} = 2\sqrt{6}, \text{ тогда } AC_1 = \sqrt{AC^2 + CC_1^2} = \sqrt{48 + 48} = 4\sqrt{3}$$

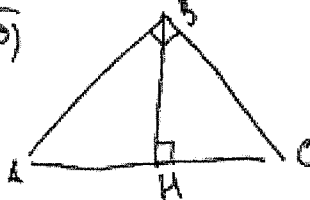
$$B_1C_1 = BC = AB = 2\sqrt{3}$$

по теореме косинусов в $\triangle AC_1B_1$

$$\cos \angle AC_1B_1 = \frac{B_1C_1^2 + AC_1^2 - AB_1^2}{2 \cdot B_1C_1 \cdot AC_1} = \frac{4 \cdot 3 + 16 \cdot 3 - 36}{2 \cdot 4\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3}} = \frac{24}{48} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\angle AC_1B_1 = \arccos \frac{1}{2} = 60^\circ \quad \text{т.е.}$$

б)



1) Опустим перпендикуляр BH на AC , тогда

BH - искомое расстояние

2) $BC \perp AB$
 $CC_1 \perp (ABC)$ $\Rightarrow$ по т. о трех перпендикулярах
 и ABC - прямоугольный $BC_1 \perp AB$

и проецируем тогда

$$3) S_{ABG} = \frac{1}{2} AB \cdot BG = \frac{1}{2} BH \cdot AC, \text{ значит } BH = \frac{AB \cdot BG}{AC}$$

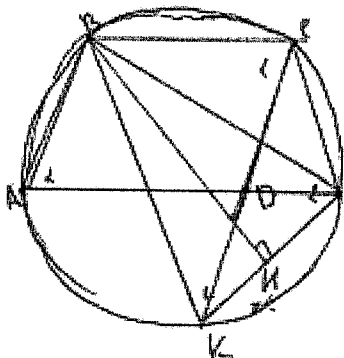
$$AC_1 = 4\sqrt{3}$$

$$AB = 2\sqrt{3}$$

$$BG = \sqrt{BC^2 + CG^2} = \sqrt{4 \cdot 3 + 4 \cdot 6} = 6, \text{ тогда } BH = \frac{2\sqrt{3} \cdot 6}{4\sqrt{3}} = 3$$

Ответ: $BH = 3$

16



а) Докажем:

1) Пусть $\angle BAD = \alpha$, тогда $\angle BCK = \alpha$

т.к. $ABCD$ параллелограмм

2) $\angle BEK = \angle BCK = \alpha$ т.к. вписанные углы опирающиеся на одну дугу.

$\angle BKE = \angle BAE = \alpha$ т.к. вписанные, опирающиеся на одну дугу

3) В $\triangle BKE$ $\angle BKE = \angle BEK = \alpha \Rightarrow \triangle BKE$ равнобедренный
 $BK = BE$ т.н.г.

б) Пусть $BE = x$, проведем высоту BH в $\triangle BKE$
 высота в равнобедренном $\triangle$ -е также делит $\Rightarrow KH = HE$
 $HE = BE \cdot \cos \angle BEK = BE \cdot \cos \alpha = x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$, значит $KE = x \cdot \sqrt{3}$

2) $BC \parallel AE$

$BC \neq AE$ т.к. $AE = AD + DE = BC + DE, DE > 0$, значит $ABCE$ - трапеция

$$\angle EAB + \angle ABC = 180^\circ \Rightarrow \angle ABC = 150^\circ$$

$\angle ABC + \angle AEC = 180^\circ$ как сумма углов противоположных углов вписанного четырехугольника $\Rightarrow \angle AEC = 30^\circ \Rightarrow$ трапеция $ABCE$ равнобедренная

3) В равнобедренной трапеции диагонали равны т.к.

$$\left. \begin{array}{l} AB = CE \\ AE - общая \\ \angle BAE = \angle AEC \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABE = \triangle ACE \Rightarrow AC = BE, \text{ тогда } AC = x$$

$$\text{тогда } KE : AC = \sqrt{3}x : x = \sqrt{3} : 1 \quad \text{Ответ: } KE : AC = \sqrt{3} : 1$$

12. Пусть сумма взятых кредита равна S тыс рублей, и n - число месяцев, на которые взят кредит. т.к. в конце n -ого месяца сумма долга должна составлять 200 тыс руб $= \frac{1}{3}S$, то за n месяцев долг должен уменьшиться на $S - \frac{1}{3}S = \frac{2}{3}S$. т.к. долг каждый месяц должен уменьшаться на одну и ту же сумму, то каждый из n месяцев долг должен уменьшаться на $\frac{2S}{3n}$. В конце k -ого месяца долг должен равняться $S - \frac{2S}{3n} \cdot k$.

тогда первая выплата $x_1 = 103 \left(S - \frac{2S}{3n} \right) = 1,03S - \frac{2,06S}{3n}$ т.к. сумма долга выросла на 3 проценты

вторая выплата $x_2 = 103 \left(S - \frac{2S}{3n} \right) - \left(S - \frac{4S}{3n} \right) = 0,03S + \frac{2S}{3n}$ $(1 + \frac{3}{100})S = 1,03S$
 выплаты $x_k = 0,03S + \frac{2S}{3n} \left(1 - \frac{(k-1) \cdot 3}{100} \right)$, где k - номер месяца

докажем, что формула верна

долг в конце k -го месяца $= S - \frac{2(k-1)}{3n} S$, тогда выплата

долг в конце k месяцев $= S - \frac{2k}{3n} S$, тогда выплата

составляет $x_k = 1,03 \left(S - \frac{2(k-1)}{3n} S \right) - S + \frac{2k}{3n} S =$

$= 0,03S - 1,03 \cdot \frac{2(k-1)}{3n} S + \frac{2k}{3n} S = 0,03S + \frac{2S}{3n} (k - 1,03k + 1,03) =$

$= 0,03S + \frac{2S}{3n} \left(-\frac{3}{100}k + 1 + \frac{3}{100} \right) = 0,03S + \frac{2S}{3n} \left(1 - \frac{(k-1) \cdot 3}{100} \right)$ т.д.

Заметим, что выплаты составляют арифметическую прогрессию с разностью $-\frac{2S}{100}$, тогда за n месяцев будет выплачена сумма:

13 продолжение

$$\frac{x_1 + x_n}{2} \cdot n = \frac{0,03S + \frac{2S}{3n} + 0,03S + \frac{2S}{3n} \left(1 - \frac{(n-1) \cdot 3}{100} \right)}{2} \cdot n$$

за последний месяц выплата составила $200 \cdot 1,03 = 206$ тыс руб.

$\Rightarrow$ за первые n месяцев выплаты $(852 - 206)$ тыс руб $= 646$ тыс руб

$$\frac{S \left(0,06 + \frac{2}{3n} + \frac{2}{3n} \cdot \frac{103-3n}{100} \right) \cdot n}{2} = 646 \quad S_n \left(0,06 + \frac{200+206-6n}{3n \cdot 100} \right) = 1292$$

$$S \cdot n \left(0,06 + \frac{406-6n}{3n \cdot 100} \right) = 1294 \quad S \cdot n \left(\frac{18n+406-6n}{3n \cdot 100} \right) = 1292$$

$$S \cdot \frac{12n+406}{300} = 1292 \quad S \cdot \frac{6n+203}{300} = 646 \quad 6n+203 = \frac{646 \cdot 300}{S} =$$

$$= \frac{646 \cdot 300}{600} = 323 \quad 6n+203=323 \quad 6n=120 \quad n=20$$

Ответ: 20 месяцев

$$13. \textcircled{1} \begin{cases} y = (a+2)x^2 + 2ax + a-2 \\ y^2 = x^2 \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} y = |x| \\ y = -|x| \end{cases}$$

① Заметим, что при любом a при $x = -1$ $y = 0$

$$\textcircled{2} \quad y^2 = x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} y = |x| \\ y = -|x| \end{cases}$$

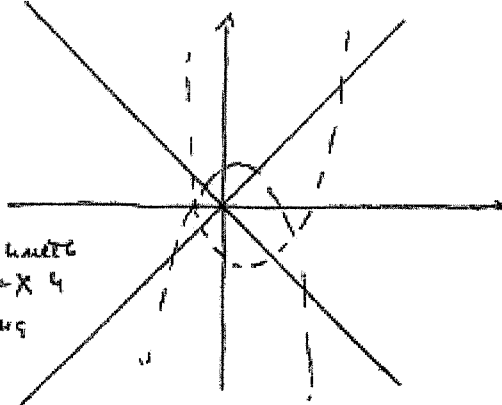
построим графики функций

$$\begin{aligned} y &= |x| \\ y &= -|x| \\ y &= (a+2)x^2 + 2ax + a-2 \end{aligned}$$

Заметим, что чтобы было ровно 4 решения, парабола

$y = (a+2)x^2 + 2ax + a-2$ должна иметь 2 общие точки с ^{каждой} прямой $y = x$ и

$y = -x$, причем это не должно быть точка $(0,0)$, т.е. решения не должны совпадать



13 продолжение

т.к. парабола не может пересечь прямую больше чем в 2 точках, то ровно 4 решения будет когда 2 и 1 точка

$$1) \quad y = x$$

$$y = (a+2)x^2 + 2ax + a-2$$

$$x = (a+2)x^2 + 2ax + a-2$$

$$(a+2)x^2 + (2a-1)x + a-2 = 0$$

$$D > 0$$

чтобы было 2 решения

$$(2a-1)^2 - 4(a+2)(a-2) > 0$$

$$4a^2 - 4a + 1 - a^2 + 4 > 0$$

$$3a^2 - 4a + 5 > 0 \quad \forall a$$

$$2) \quad y = -x$$

$$y = (a+2)x^2 + 2ax + a-2$$

$$(a+2)x^2 + (2a+1)x + a-2 = 0$$

$$\text{чтобы было 2 решения } D > 0$$

$$(2a+1)^2 - 4(a+2)(a-2) > 0$$

$$4a^2 + 4a + 1 - a^2 + 4 > 0$$

$$3a^2 + 4a + 5 > 0 \quad \forall a$$

3) Заметим, что при $a = 2$ $(0,0)$ - решение $\Rightarrow$ не подходит

$$0 = (a+2) \cdot 0^2 + 2a \cdot 0 + a-2 \quad a=2$$

$$\Rightarrow \forall a \neq 2$$

$$\text{Ответ: } \forall a \neq 2 \quad \text{Ответ: } \forall a \neq 2$$

Заметим, что вершины параболы должны лежать левее $(-1,0)$

$$\frac{-2a}{2(a+2)} > -1 \quad \frac{-a}{a+2} + 1 > 0 \quad \frac{-a+a+2}{a+2} > 0 \quad a > -2$$

$$\Rightarrow a \in (-2; 2) \cup (2; +\infty)$$

$$\text{Ответ: } a \in (-2; 2) \cup (2; +\infty)$$

Ответ: задание № 13 можно оценить на 1 балл или на 2 балла.

Практическая работа № 2

Оцените решения заданий № 13 и № 15 выпускника в соответствии с критериями:

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

13

а) Решите уравнение

$$2 \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right) - 2\sqrt{3} \cos^2 x = \cos x - 2\sqrt{3}$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; -\pi \right]$.
Решение.

а) Запишем исходное уравнение в виде:

$$\sqrt{3} \sin x + \cos x - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} \sin^2 x = \cos x - 2\sqrt{3}; \quad \sqrt{3} \sin x + 2\sqrt{3} \sin^2 x = 0;$$

$$\sin x \cdot (2 \sin x + 1) = 0.$$

$\sin x = 0$ $x = \pi k$
Значит, , откуда , или $\sin x = -\frac{1}{2}$, откуда $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, или
 $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi m$, .

б) С помощью числовой окружности отберём корни,

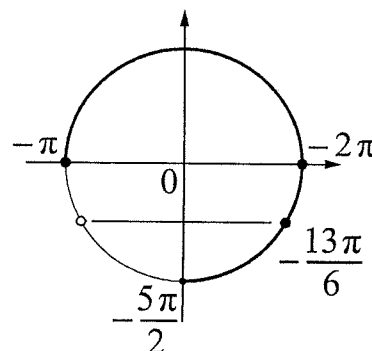
принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; -\pi \right]$.

Получим числа: $-\frac{\pi}{6}$; $-\frac{5\pi}{6}$; $-\pi$.

Ответ: а) πk , $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, ;

$-\frac{\pi}{6} + 2\pi m$, ;

б) $-\frac{\pi}{6}$; $-\frac{5\pi}{6}$; $-\pi$.



Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта а и пункта б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15

$$\log_5 \left(\frac{2}{x} + 2 \right) - \log_5 (x+3) \leq \log_5 \left(\frac{x+6}{x^2} \right).$$

Решите неравенство

Решение.

Левая часть неравенства определена при $-3 < x < -1$ и $x > 0$, поэтому

при $-3 < x < -1$ и $x > 0$ неравенство принимает вид:

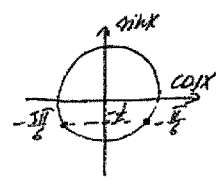
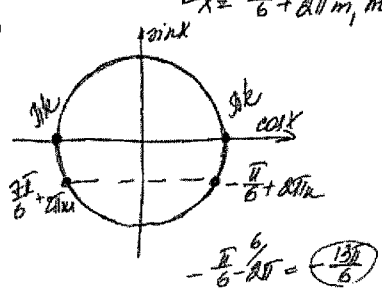
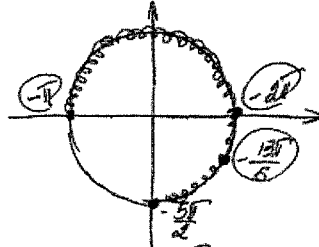
$$\frac{2x+2}{x(x+3)} \leq \frac{x+6}{x^2}; \quad \frac{2x^2+2x}{x^2(x+3)} \leq \frac{x^2+9x+18}{x^2(x+3)}; \quad \frac{x^2-7x-18}{x^2(x+3)} \leq 0; \quad \frac{(x-9)(x+2)}{x^2(x+3)} \leq 0,$$

откуда $x < -3$; $-2 \leq x < 0$; $0 < x \leq 9$. Учитывая ограничения $-3 < x < -1$ и $x > 0$, получаем: $-2 \leq x < -1$; $0 < x \leq 9$.

Ответ: $[-2; -1); (0; 9]$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек -2 и / или 9 , ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

$\sqrt{3} \sin(x + \frac{\pi}{6}) - 2\sqrt{3} \cos^2 x = \cos x - 2\sqrt{3}$
 $2(\sin x \cos \frac{\pi}{6} + \cos x \sin \frac{\pi}{6}) - 2\sqrt{3} \cos^2 x = \cos x - 2\sqrt{3}$
 $2(\sin x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cos x) - 2\sqrt{3} \cos^2 x = \cos x - 2\sqrt{3}$
 $\sqrt{3} \sin x + \cos x - 2\sqrt{3} \cos^2 x = \cos x - 2\sqrt{3}$
 $\sqrt{3} \sin x - 2\sqrt{3} (1 - \sin^2 x) = -2\sqrt{3}$
 $\sqrt{3} \sin x - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} \sin^2 x + 2\sqrt{3} = 0$
 $\sqrt{3} (\sin x + 2 \sin^2 x) = 0 \quad | : \sqrt{3}$
 $\sin x (1 + 2 \sin x) = 0$
 $\sin x = 0 \quad \vee \quad 2 \sin x + 1 = 0$
 $x = \pi k, k \in \mathbb{Z} \quad \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{7\pi}{6} + \pi m, m \in \mathbb{Z} \end{cases}$

Ответ: а) $-\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z};$
 $\frac{7\pi}{6} + \pi m, m \in \mathbb{Z};$
 $\pi k, k \in \mathbb{Z}$
 б) $-\frac{13\pi}{6}; -2\pi; -\pi$

$$\begin{aligned}
 N15 \quad \log_5 \left(\frac{x+6}{x^2} \right) - \log_5 (x+3) &\leq \log_5 \left(\frac{x+6}{x^2} \right) \\
 \log_5 \left(\frac{2+2x}{x^2} \right) - \log_5 (x+3) &\leq \log_5 \left(\frac{x+6}{x^2} \right) \\
 \log_5 \left(\frac{2+2x}{x(x+3)} \right) &\leq \log_5 \left(\frac{x+6}{x^2} \right)
 \end{aligned}$$

Ф.п.к. основание логарифма > 1 , $\frac{2+2x}{x(x+3)} \leq \frac{x+6}{x^2}$

$$\begin{aligned}
 \frac{x+6}{x^2} - \frac{2+2x}{x(x+3)} &\geq 0 \\
 \frac{x^2 + 6x + 18 - 2x^2 - 2x}{x^2(x+3)} &\geq 0 \\
 \frac{-x^2 + 7x + 18}{x^2(x+3)} &\geq 0
 \end{aligned}$$

$$\frac{-(x-9)(x+2)}{x^2(x+3)} \geq 0$$

Найдём нули числителя и знаменателя дроби:

 (I) $-x^2 + 7x + 18 = 0$

 $x^2 - 7x - 18 = 0$

 $D = 49 + 72 = 121$

 $x_{1,2} = \frac{7 \pm 11}{2} = 9, -2$

 (II) $x^2(x+3) = 0$

 $x = 0 \vee x = -3$

Отметим полученные значения на числовой прямой и методом интервалов найдём реш-е нерав.:

 $x \in (-\infty; -3) \cup [-2; 0] \cup (0; 9]$

Но с учётом ограничений на x получим:

 $x \in [-2; -1) \cup (0; 9]$

 Ответ: $[-2; -1) \cup (0; 9]$

Ответ: задание № 13 – 1 балл; задание № 15 – 2 балла.

Практическая работа № 3

Оцените решения заданий № 14 и № 16 выпускника в соответствии с критериями:

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

14

В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания.

На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки A , B и C ,

а на окружности другого основания — точка C_1 , причём CC_1 — образующая цилиндра, а AC — диаметр основания. Известно, что $\angle ACB = 45^\circ$, $AB = 2\sqrt{3}$, $CC_1 = 2\sqrt{6}$.

а) Докажите, что угол между прямыми AC_1 и BC равен 60° .

б) Найдите расстояние от точки B до прямой AC_1 .

Решение.

а) Пусть BB_1 — образующая цилиндра. Тогда BB_1C_1C — прямоугольник, поэтому угол между прямыми AC_1 и BC равен углу AC_1B_1 .

Угол ABC опирается на диаметр основания цилиндра, поэтому он прямой. Значит, прямая B_1C_1 , параллельная прямой BC , перпендикулярна прямым AB и BB_1 . Таким образом, прямая B_1C_1 перпендикулярна плоскости ABB_1 , а значит, угол AB_1C_1 прямой.

В прямоугольном треугольнике AB_1C_1 :

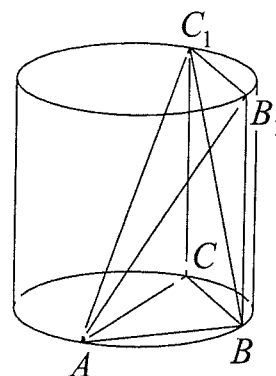
$$B_1C_1 = BC = AB = 2\sqrt{3}, \quad AB_1 = \sqrt{AB^2 + BB_1^2} = \sqrt{AB^2 + CC_1^2} = 6.$$

Значит, $\angle AC_1B_1 = 60^\circ$.

б) Прямая AB перпендикулярна прямым BC и BB_1 . Таким образом, прямая AB перпендикулярна плоскости BB_1C . Следовательно, треугольник ABC_1 прямоугольный, поэтому искомое расстояние равно его высоте h , проведённой к гипотенузе. Получаем:

$$BC_1 = \sqrt{BC^2 + CC_1^2} = 6; \quad AC_1 = \sqrt{AB^2 + BC_1^2} = 4\sqrt{3}; \quad h = \frac{AB \cdot BC_1}{AC_1} = 3.$$

Ответ: б) 3.



Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а и обоснованно получен верный ответ в пункте б	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б, возможно, с использованием утверждения пункта а, при этом пункт а не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16

Окружность проходит через вершины A , B и C параллелограмма $ABCD$, пересекает продолжение стороны AD за точку D в точке E и пересекает продолжение стороны CD за точку D в точке K .

а) Докажите, что $BK = BE$.

б) Найдите отношение $KE : AC$, если $\angle BAD = 30^\circ$.

Решение.

а) Заметим, что $\angle BAE = \angle BAD = \angle BCD = \angle BCK$. Значит, хорды окружности BK и BE стягивают равные дуги. Поэтому эти хорды равны.

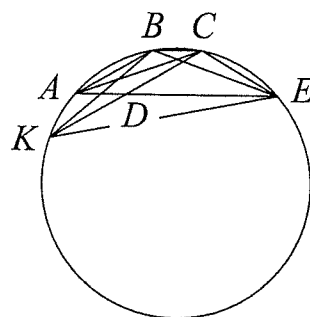
б) Заметим, что

$$\begin{aligned}\angle AEC &= 180^\circ - \angle ABC = \angle BAD = 30^\circ, \\ \angle CDE &= 180^\circ - \angle ADC = \angle BAD = 30^\circ; \\ \angle DCE &= 180^\circ - \angle CDE - \angle CED = 120^\circ.\end{aligned}$$

Значит, по теореме синусов для треугольников KCE и AEC получаем:

$$\frac{KE}{\sin \angle KCE} = \frac{AC}{\sin \angle AEC}; \quad \frac{KE}{AC} = \frac{\sin \angle KCE}{\sin \angle AEC} = \sqrt{3}.$$

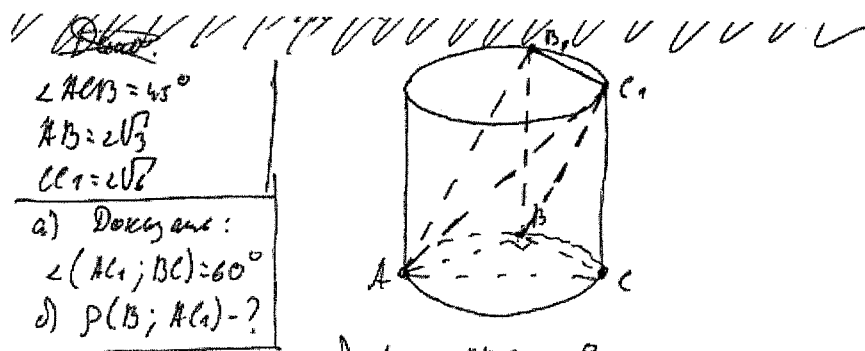
Ответ: б) $\sqrt{3}$.



Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а и обоснованно получен верный ответ в пункте б	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте б ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а и при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, ИЛИ при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б с использованием утверждения пункта а, при этом пункт а не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Дано:
 Прямоугольник
 А, В, С, Е образуют основание
 С₁ - вершина
 (С₁ - вершина; АС - высота)

№ 14.



- а) 1. $\angle ABC = 90^\circ$, т.к. она лежит на высоте. $\Rightarrow \angle BAC = 180^\circ - \angle ABC - \angle BCA = 45^\circ \Rightarrow \triangle ABC$ — равнобедренный
2. По теореме Пифагора:
 $\triangle ABC: AC = \sqrt{2 AB^2} = 4\sqrt{3}$
 $\triangle AC_1C: AC_1 = \sqrt{AC^2 + CC_1^2} = 4\sqrt{6}$
3. Проведем $B_1C_1 \parallel BC$ (B_1C_1 — основание с высотой CC_1)
 $\Rightarrow \angle AC_1B_1$ — искомого угла; B_1B_1 — образующая цилиндра
4. По теореме Пифагора: $\triangle AB_1B$:
 $AB_1 = \sqrt{AB^2 + BB_1^2} = 6$
5. $\triangle AB_1C_1$: по т. косинусов:
 $AB_1^2 = AB_1^2 + AC_1^2 - 2 B_1C_1 \cdot AC_1 \cdot \cos \angle B_1C_1A$
 $\cos \angle B_1C_1A = \frac{AB_1^2 + AC_1^2 - B_1C_1^2}{2 AB_1 \cdot AC_1} = \frac{36 + 96 - 48}{2 \cdot 6 \cdot 4\sqrt{6}} = \frac{84}{48\sqrt{6}} = \frac{7}{4\sqrt{6}} = \frac{1}{2}$ (т.к. на косинус)

$$\begin{cases} \cos \angle B_1C_1A = \frac{1}{2} \\ \angle B_1C_1A \in (0; \pi) \end{cases} \Rightarrow \angle B_1C_1A = 60^\circ \quad \#$$

- б) 1. Проведем B_1C_1 — высота
2. Искомое расстояние — высота $\triangle AC_1B$ (обозначим ее h), проведенная из точки B
3. $\triangle CB_1C_1$: по теореме Пифагора: $B_1C_1 = \sqrt{CC_1^2 + BC^2} = 6$
4. Вычислим площадь $\triangle AC_1B$ по формуле Тейлора:
 $p = \frac{AB + B_1C_1 + AC_1}{2} = 3 + 3\sqrt{3}$

$$S = \sqrt{p(p-AB)(p-B_1C_1)(p-AC_1)} = \sqrt{(3+3\sqrt{3})(3\sqrt{3}-3)(3+3\sqrt{3})(3-3\sqrt{3})} = \sqrt{(27-9)(9-3)} = \sqrt{18 \cdot 6} = \sqrt{6^2 \cdot 3} = 6\sqrt{3}$$

$$S = 6\sqrt{3} = \frac{1}{2} h \cdot AC_1 \Rightarrow h = \frac{12\sqrt{3}}{4\sqrt{6}} = \frac{12\sqrt{5}}{4\sqrt{3}} = 3$$

Ответ: 3

Дано:
 $ABCD$ - ч/ч
 $OK \perp (O; R) \cap AD = E$
 $\cap CD = K$

а) Доказать:
 $BK = BE$
 б) $KE:AC$?

а) 1. Пусть $\angle BAE = \alpha$,
 тогда $\angle BCE = 180^\circ - \alpha$
 (как углы при вершине E)
 2. $\angle AEC = 180^\circ - \angle BEC$
 (как смежные углы) $\Rightarrow$
 $\angle AEC = \alpha \Rightarrow ABCE$ - равно-
 бокая трапеция $\Rightarrow AB = CE = CD$
 $\Rightarrow \triangle DCE$ - равнобедренный $\Rightarrow \angle CDE = \alpha$
 3. $\angle BAE = \angle BKE$ (они опираются на одну дугу) $= \alpha$
 4. $\angle KBE = \angle ABC - \angle ABK - \angle EBC$
 $\angle ABC = 180^\circ - \alpha$
 $\angle ABK = \angle AEK$ (они опираются на одну дугу)
 $\angle EBC = \angle CKE$ (они опираются на одну дугу)
 5. $\angle KDE = 180^\circ - \alpha = 180^\circ - \angle DKE - \angle DEK \Rightarrow$
 $\angle DKE = \angle DEK = \angle ABK + \angle CDE = \alpha \Rightarrow$
 $\angle KBE = 180^\circ - 2\alpha$; $\angle BEK = 180^\circ - \angle KBE - \angle BKE =$
 $= 2\alpha = \angle BKE \Rightarrow \triangle BKE$ - равнобедренный $\Rightarrow BK = BE$

Ответ: задание № 14 – 2 балла; задание № 16 – 0 баллов.

Практическая работа № 4

Оцените решение задания № 17 выпускника в соответствии с критериями:

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

17 15-го декабря планируется взять кредит в банке на сумму 600 тысяч рублей

на $(n+1)$ месяц. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца с 1-го по n -й долг должен быть на одну и ту же сумму

меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
 — 15-го числа n -го месяца долг составит 200 тысяч рублей;
 — к 15-му числу $(n+1)$ -го месяца кредит должен быть полностью погашен.
 Найдите n , если известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита составит 852 тысячи рублей.

Решение.

По условию, долг перед банком (в тыс. рублей) по состоянию на 15-е число должен уменьшаться до нуля следующим образом:

$$600; \frac{600(n-1)+200}{n}; \frac{600(n-2)+200 \cdot 2}{n}; \dots; \frac{600+200(n-1)}{n}; 200; 0.$$

Первого числа каждого месяца долг возрастает на 3%, значит, последовательность размеров долга (в тыс. рублей) по состоянию на 1-е число такова:

$$618; 1,03 \cdot \frac{600(n-1)+200}{n}; \dots; 1,03 \cdot \frac{600+200(n-1)}{n}; 206.$$

Следовательно, выплаты (в тыс. рублей) должны быть следующими:

$$18 + \frac{400}{n}; 0,03 \cdot \frac{600(n-1)+200}{n} + \frac{400}{n}; \dots; 0,03 \cdot \frac{600+200(n-1)}{n} + \frac{400}{n}; 206.$$

Всего следует выплатить

$$0,03 \cdot \frac{600(n+1)+200(n-1)}{2} + 400 + 206 = 12n + 612 \quad (\text{тыс. рублей}),$$

откуда $12n + 612 = 852$; $12n = 240$; $n = 20$.

Ответ: 20.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели и получен результат: — неверный ответ из-за вычислительной ошибки; — верный ответ, но решение недостаточно обосновано	2
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

№17

$K = 100 \text{ тыс.}, S = 852 \text{ тыс.}$

$x_i = K_i - 1,01 \cdot a$ $a = \frac{400}{n}$

1	K	x_i - величина долга в i -й раз
2	$K - a$	K_i - сумма долга в i -й раз
...		
n	200 тыс.	

$1,01 K_i - x_i = K_i - a \Rightarrow x_i = 0,01 K_i + a; \quad K_i = K - a(i-1) \Rightarrow x_i = 0,01(K - a(i-1)) + a$

$S = \sum x_i + 200 \cdot 1,01 = 0,01 \cdot (K - a \cdot \frac{n(n-1)}{2}) + a \cdot n + 200 \cdot 1,01$

$852 = 0,01 \cdot 100n - 0,01 \cdot 200(n-1) + 400 + 200 \cdot 1,01$

$852 = 10n - 2n + 2 + 400 + 206 \Rightarrow 12n = 240 \Rightarrow n = 20$

Ответ: 20 месяцев.

Ответ: задание № 17 – 3 балла.

17. Пусть $a_1 = 200 \text{ тыс. руб.};$
 $a_n = 600 \text{ тыс. руб.};$
 $r = 0,03$ (ка сколько проц. каждый раз растет долл.);
 $S = 852 \text{ тыс. руб.}$

Так как долг каждый раз увеличивается на одну и ту же величину, можно применить формулу арифм. прогрессии:
 $a_n = a_1 + d(n-1)$ d - разность между остатками a_i и a_{i-1}

При погашении долга каждый раз добавляются проценты, сумма которых равна $S - a_n = 252 \text{ тыс. руб.}$ Получается,

что $S - a_n = a_n \cdot r + a_{n-1} \cdot r + a_{n-2} \cdot r \dots + 200 \cdot r$

$S - a_n = r(a_n + a_{n-1} \dots + 200) = r S_n$

$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \quad S - a_n = \frac{r n (a_1 + a_n)}{2}$

$n = \frac{2(S - a_n)}{r(a_1 + a_n)} = \frac{2(252)}{0,03 \cdot 800} = \frac{504}{24} = 21$

Ответ: $n = 21$

Ответ: задание № 17 – 0 баллов.

Практическая работа № 5

Оцените решения заданий № 18 и № 19 выпускника в соответствии с критериями:

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

18 Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} y = (a+2)x^2 + 2ax + a - 2, \\ y^2 = x^2 \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

Решение.

При $a = -2$ первое уравнение системы задаёт прямую $y = -4x - 4$ и система имеет два решения. При $a \neq -2$ это уравнение задаёт параболу ω .

Второе уравнение системы задаёт пару прямых $y = x$ и $y = -x$, пересекающихся в точке $(0; 0)$.

Прямая и парабола имеют не более двух общих точек. Значит, исходная система уравнений имеет ровно четыре различных решения тогда и только тогда, когда парабола ω пересекается с каждой из прямых $y = x$ и $y = -x$

в двух точках и не проходит через их точку пересечения $(0; 0)$.

Число точек пересечения параболы ω с прямой $y = x$ равно числу корней квадратного уравнения

$$(a+2)x^2 + (2a-1)x + a - 2 = 0.$$

Это уравнение имеет ровно два корня при положительном дискриминанте:

$$(2a-1)^2 - 4a^2 + 16 > 0; \quad 4a - 17 < 0,$$

откуда $a < \frac{17}{4}$.

Число точек пересечения параболы ω с прямой $y = -x$ равно числу корней квадратного уравнения

$$(a+2)x^2 + (2a+1)x + a - 2 = 0.$$

Это уравнение имеет ровно два корня при положительном дискриминанте:

$$(2a+1)^2 - 4a^2 + 16 > 0; \quad 4a + 17 > 0,$$

откуда $a > -\frac{17}{4}$.

Парабола ω проходит через точку $(0; 0)$ при $a - 2 = 0$, то есть при $a = 2$.

Таким образом, исходная система уравнений имеет ровно четыре решения при

$$-\frac{17}{4} < a < -2; \quad -2 < a < 2; \quad 2 < a < \frac{17}{4}.$$

Ответ: $-\frac{17}{4} < a < -2; \quad -2 < a < 2; \quad 2 < a < \frac{17}{4}.$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого только включением точек $a = -\frac{17}{4}$ и/или $a = \frac{17}{4}$	3
С помощью верного рассуждения получены промежутки $\left(-\frac{17}{4}; -2\right)$ и $\left(-2; \frac{17}{4}\right)$, возможно, с включением точек $a = -\frac{17}{4}$ и/или $a = \frac{17}{4}$ ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	2
Верно рассмотрен хотя бы один из случаев решения и получен один из промежутков $\left(-\infty; \frac{17}{4}\right)$ или $\left(-\frac{17}{4}; +\infty\right)$, возможно, с включением граничных точек ИЛИ задача верно сведена к исследованию взаимного расположения параболы и прямых (аналитически или графически)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

- 19** На доске написано 10 различных натуральных чисел. Среднее арифметическое шести наименьших из них равно 5, а среднее арифметическое шести наибольших равно 15.
- а) Может ли наименьшее из этих десяти чисел равняться 3?
- б) Может ли среднее арифметическое всех десяти чисел равняться 11?
- в) Найдите наибольшее значение среднего арифметического всех десяти чисел.

Решение.

а) Если наименьшее число равно 3, то сумма шести наименьших чисел не меньше $3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 33$, а их среднее арифметическое больше 5.

б) Пусть сумма четырёх наименьших чисел равна A , сумма пятого и шестого по величине чисел равна B , а сумма четырёх наибольших чисел равна C . Предположим, что среднее арифметическое всех десяти чисел равно 11. Тогда получаем:

$$A + B = 30, B + C = 90, A + B + C = 110,$$

откуда $A = 20$, $B = 10$. Это невозможно, поскольку должно выполняться неравенство $A < 2B$.

в) По условию $A + B = 30$, $B + C = 90$. Среднее арифметическое будет наибольшим, когда будет наибольшей сумма всех чисел:

$$A + B + C = (A + B) + (B + C) - B = 120 - B.$$

Значит, нужно найти наименьшее значение B .

Пусть числа, написанные на доске, равны $a_1, a_2, \dots, a_{10}$, причём

$$a_1 < a_2 < \dots < a_{10}.$$

Тогда $a_1 + 4 \leq a_5$, $a_2 + 4 \leq a_6$, $a_3 + 2 \leq a_5$, $a_4 + 2 \leq a_6$, откуда

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + 12 \leq 2a_5 + 2a_6; A + 12 \leq 2B.$$

Значит, $3B \geq A + B + 12 = 42; B \geq 14$.

Если $B = 14$, то $a_5 \leq 6, a_4 \leq 5, \dots, a_1 \leq 2$, откуда $A \leq 14$. Получаем противоречие, поскольку $A + B \leq 28 < 30$. Значит, $B \geq 15$.

Покажем, что число B может равняться 15. Например, если на доске написаны числа 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 45, то условия задачи выполнены

и $B = 15$. Таким образом, наибольшее значение среднего арифметического равно

$$\frac{A + B + C}{10} = \frac{120 - B}{10} = 10,5$$

Ответ: а) нет; б) нет; в) 10,5.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение пункта а; — обоснованное решение пункта б; — искомая оценка в пункте в; — пример в пункте в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

1118) $a = ?$, при котором система имеет 4 реал. реш.

$$\begin{cases} y = (a+2)x^2 + 2ax + a - 2 & (1) \\ y^2 = x^2 & (2) \end{cases}$$

(2) $(y-x)(y+x) = 0$
т.е. $y = x$ или $y = -x$

(1) $y = (a+2)x^2 + 2ax + a - 2$

при $a = -2$ $y = -4x - 2 - 2 = -4x - 4$ — прямая

$$\begin{cases} y = -4x - 4 \\ x^2 = -4x - 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -4 \\ x = -2 \end{cases}$$

при таком a система имеет 2 решения $\Rightarrow a = -2$ не угод.

при $a \neq -2$ $y = (a+2)x^2 + 2ax + a - 2$ — множество парабол.

Эскиз графика:

Чтобы система имела 4 решения, каждая из парабол должна иметь по 2 пересечения с каждой из прямых.

Тогда 4) $x = (a+2)x^2 + 2ax + a - 2$ имеет 2 корня
и однофактор⁽¹⁹⁾ $-x = (a+2)x^2 + 2ax + a - 2$ имеет 2 фактора

$$(1) (a+2)x^2 + 2ax - x + a - 2 = 0.$$

$$(a+2)x^2 + x(2a-1) + a-2 = 0$$

$$D = (2a-1)^2 - 4 \cdot (a+2)(a-2) = 4a^2 - 4a + 1 - 4(a^2 - 4) = -4a + 17$$

чтобы ур-ие имело 2 реш. $D > 0$.

$$-4a + 17 > 0$$

$$(2) -x = (a+2)x^2 + 2ax + x + a - 2 = 0$$

$$D = (2a+1)^2 - 4(a+2)(a-2) = 4a^2 + 4a + 1 - 4(a^2 - 4) = 4a + 17$$

$$\begin{cases} 4a + 17 > 0 \\ -4a + 17 > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a > -\frac{17}{4} \\ a < \frac{17}{4} \end{cases}$$

Рассмотрим случ. совпадения решений:

$$B \in M(0, 0).$$

$$! M(0, 0) \nsubseteq y = (a+2)x^2 + 2ax + a - 2$$

$$0 = a + a - 2 \quad | \Rightarrow a \neq 2$$

Если $a = 2$ при таком a парабола будет иметь менее 4 пересечения с $y = x^2$ и $y = -x$

$$\text{Ответ: } a \in (-\frac{17}{4}; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; \frac{17}{4}).$$

$$\textcircled{N19} \quad \begin{cases} \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6}{6} = 5 \\ \frac{a_{10} + a_9 + a_8 + a_7 + a_6 + a_5}{6} = 15 \end{cases}$$

Числа различны. 6

а) Может ли сф. аран наименьшее из чисел - 3?

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 30$$

Пусть a_1 - наименьшее и $a_1 = 3$

тогда ~~так как~~ поскольку все числа различны комбинация из наименьших чисел ~~такова~~ ^{возм.}

$$3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 33 > 30$$

~~1) первые числа не могут быть~~ ^{а именно} ~~наим.~~ остальных комбинаций чисел еще больше 33 ~~и~~

1) Нет, перв. наименьшее из чисел не может равняться 3

$$\textcircled{b)} \quad \frac{a_{10} + a_9 + a_8 + a_7 + a_6 + a_5}{6} = 15$$

Да, может. Например:

$$\underline{13 + 16 + 18 + 20 + 21 + 22}$$

Ответ: задание № 18 - 4 балла; задание № 19 - 1 балл.

3.2. Итоговая аттестация включает

- итоговое тестирование на знание нормативных документов ГИА и регламента проведения экзамена;
- зачет: оценивание заданий с развернутым ответом.

Слушатель аттестован, если выполнил тест и на зачете суммарное расхождение с эталонными ответами не превысило 25% (для слушателей, претендующих на статус старших экспертов – 15%).

Пример тестового задания:

Отметьте документы, определяющие порядок формирования и деятельности ПК:

- 1) Положение о предметной комиссии.
- 2) Положение о ГЭК субъекта РФ.
- 3) Федеральный закон № 273-ФЗ от 29.12.2012 г. «Об образовании в Российской Федерации».

Пример кейсового задания:

1. Проконсультировать эксперта по проверке заданий с развернутым ответом во время работы ПК ГИА на пункте проверки заданий (ППЗ) может *(Выберите все верные варианты ответа):*

- 1) старший эксперт, находящийся в аудитории
- 2) организатор в аудитории
- 3) консультант, назначенный руководителем ПК
- 4) председатель ПК ГИА
- 5) руководитель ППЗ

Материалы для проведения зачета предоставляются ФГБНУ ФИПИ, РЦОИ города Москвы.

Пример зачетного задания

Оцените решения заданий №№ 13–19 выпускника в соответствии с критериями (критерии развёрнутых ответов приведены в практических работах №№ 2–5):

$$(13) 2 \sin(x + \frac{\pi}{6}) - 2\sqrt{3} \cos^2 x = \cos x - 2\sqrt{3}$$

$$2(\sin x \cdot \cos \frac{\pi}{6} + \cos x \cdot \sin \frac{\pi}{6}) - 2\sqrt{3} \cos^2 x - \cos x + 2\sqrt{3} = 0$$

$$2(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x) - 2\sqrt{3} \cos^2 x - \cos x + 2\sqrt{3} = 0$$

$$\sqrt{3} \sin x + \cos x - 2\sqrt{3} \cos^2 x - \cos x + 2\sqrt{3} = 0$$

$$\sin x - 2(1 - \sin^2 x) + 2 = 0$$

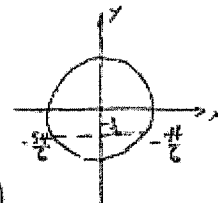
$$\sin x - 2 + 2\sin^2 x + 2 = 0$$

$$\sin x (1 + 2\sin x) = 0$$

$$\sin x = 0 \Rightarrow x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\sin x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z} \quad (a)$$



$$b) -\frac{5\pi}{2} \leq \pi n \leq -\pi$$

$$-\frac{5\pi}{2} \leq -\frac{\pi}{6} + 2\pi k \leq -\pi$$

$$-\frac{5\pi}{2} \leq -\frac{5\pi}{6} + 2\pi m \leq -\pi$$

$$-\frac{5}{2} \leq n \leq -1$$

$$-\frac{7}{3} \leq 2k \leq -\frac{5}{6}$$

$$-\frac{5}{3} \leq 2m \leq -\frac{1}{6}$$

$$n \in \mathbb{Z} \Rightarrow n = -2, -1 \Rightarrow$$

$$k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k = -1 \Rightarrow$$

$$m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \emptyset$$

$$\Rightarrow \text{корни: } x_1 = -2\pi, x_2 = -\pi$$

$$\Rightarrow \text{корни } x_3 = -\frac{13\pi}{6}$$

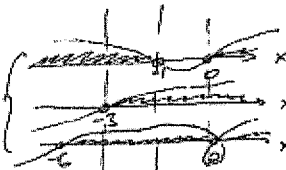
$$\text{Ответ: а) } x = \pi n, x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi m; n, k, m \in \mathbb{Z}$$

$$b) x_1 = -\frac{13\pi}{6}, x_2 = -2\pi, x_3 = -\pi.$$

$$(15) \log_5(\frac{2}{x} + 2) - \log_5(x+3) \leq \log_5(\frac{x+6}{x^2})$$

$$\text{Ограничения: } \begin{cases} \frac{2}{x} + 2 > 0 \\ x+3 > 0 \\ \frac{x+6}{x^2} > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{2x+2}{x} > 0 \\ x+3 > 0 \\ \frac{x+6}{x^2} > 0 \end{cases}$$



Проверим ограничения на переменную x по графику
исполнено: $x \in (-3; -1) \cup (0; +\infty)$

$$\log_5 \left(\frac{2x+2}{x} \right) - \log_5 (x+3) \leq \log_5 \left(\frac{x+6}{x^2} \right)$$

по свойствам логарифмов:

$$\log_5 \frac{2x+2}{x(x+3)} \leq \log_5 \left(\frac{x+6}{x^2} \right)$$

$\log_5$ — возрастающая функция $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{2x+2}{x(x+3)} \leq \frac{x+6}{x^2}$$

$$\frac{(2x+2)x - (x+6)(x+3)}{x^2(x+3)} \leq 0$$

$$\frac{2x^2+2x - x^2-9x-18}{x^2(x+3)} \leq 0$$

$$\frac{x^2-7x-18}{x^2(x+3)} \leq 0$$

Разделим на множители $x^2-7x-18$

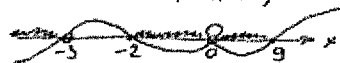
$$\Delta = 49 - 4 \cdot (-18) = 49 + 72 = 121$$

$$x_1 = \frac{7-11}{2} = -2; \quad x_2 = \frac{7+11}{2} = 9$$

$$x^2-7x-18 = (x+2)(x-9)$$

$$\frac{(x+2)(x-9)}{x^2(x+3)} \leq 0$$

Решим методом интервалов.

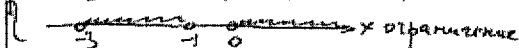
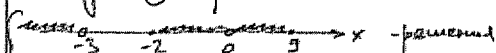


$$x \in (-\infty; -5) \cup (-2; 0) \cup (0; 9]$$

Вкаждой области перед переменной x стоит знак '+', значит самый правый интервал положительный, плюс знаки чередуются за исключением $x=0$, т.к. множитель в квадрате.

Исходя из ограничений:

$$x \in [-2; -1] \cup (0; 9]$$



$$\text{Ответ: } x \in [-2; -1] \cup (0; 9]$$

19) а) Если наименьшее число 3, то максимальное

среднее арифметическое первых 6 чисел:

$$\frac{3+4+5+6+7+8}{6} = \frac{11}{2} = 5,5 > 5$$

т.к. это наименьшее число по условию 3, значит их сумма минимальна, минимальное ср. ариф. больше заданного $\Rightarrow$ невозможно

б) Пусть $a_1, \dots, a_{10}$ — числа, записанные на доске в порядке возрастания.

$$\text{по условию: } \begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 5 \\ a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} = 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + \dots + a_6 \leq 30 \\ a_5 + \dots + a_{10} = 90 \end{cases}$$

$$\text{Сложим 2 равенства: } (a_1 + \dots + a_{10}) + (a_5 + a_6) = 120$$

$$\text{Ср. ариф. 10 чисел} = 11 \Rightarrow \text{их сумма: } 11 \cdot 10 = 110 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1 + \dots + a_{10} = 110 \Rightarrow a_5 + a_6 = 10$$

Но числа a_5 и a_6 — разные, значит максимально возможное значение $a_5 = 4$ (т.к. $a_5 < a_6$), но т.к. числа натуральные, а натуральных чисел, меньших 4, осталось 3, которые должны соответствовать a_1, a_2, a_3, a_4 (четыре числа) — противоречие, значит невозможно.

$$18) \begin{cases} y = (a+2)x^2 + 2ax + a-2 \\ y^2 = x^2 \end{cases}$$

Рассмотрим 2 случая из 2 уравнений, чтобы было 4 корня, в каждом случае должно быть 2 корня, т.к. квадратные уравнения имеют максимум 2 корня.

а) $y = x$

$$x = (a+2)x^2 + 2ax + a-2$$

$$(a+2)x^2 + (2a-1)x + a-2 = 0$$

при $a = -2$ - линейное уравнение $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ 1 корень - не подходит
($-5x - 4 = 0$) $a \neq -2$

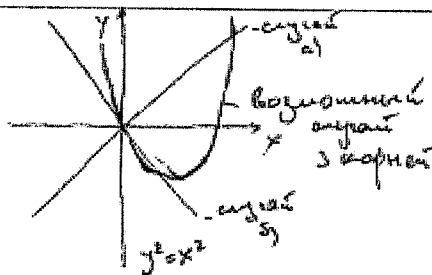
$$D = (2a-1)^2 - 4(a+2)(a-2) =$$

$$= 4a^2 - 4a + 1 - 4a^2 + 16 = -4a + 17$$

2 корня при $D > 0 \Rightarrow -4a + 17 > 0$
 $a < \frac{17}{4}$

$$x = \frac{-2a+1 \pm \sqrt{-4a+17}}{2(a+2)}$$

Но если у данной системы есть корень $(0;0)$, то тогда он будет корнем сразу в обоих случаях, ведь оба случая ему соответствуют. Рассмотрим на графике:



а) $x = \frac{-2a+1 \pm \sqrt{-4a+17}}{2(a+2)} = 0$

$$x_1 = 0: \sqrt{-4a+17} = 2a-1$$

ограничение: $2a-1 \geq 0 \Rightarrow a \geq \frac{1}{2}$

$$-4a+17 = 4a^2 - 4a + 1$$

$$4a^2 = 16 \Rightarrow a = \pm 2$$

из огранич. $\Rightarrow a = 2$

$$x_2 = 0: -\sqrt{-4a+17} = 2a-1$$

ограничение: $2a-1 \leq 0 \Rightarrow a \leq \frac{1}{2}$

$$-4a+17 = 4a^2 - 4a + 1$$

$$a = \pm 2, \text{ из огранич. } \Rightarrow a = -2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ из а) $a \neq \pm 2$

б) $x_1 = 0: \sqrt{-4a+17} = 2a+1$

огранич: $2a+1 \geq 0 \Rightarrow a \geq -\frac{1}{2}$

$$-4a+17 = 4a^2 + 4a + 1$$

$$a = \pm 2, \text{ из огранич. } \Rightarrow a = 2$$

из б) $a = \pm 2$

$$x_2 = 0: -\sqrt{-4a+17} = 2a+1$$

огранич: $2a+1 \leq 0 \Rightarrow a \leq -\frac{1}{2}$

$$-4a+17 = 4a^2 + 4a + 1$$

$$a = \pm 2, \text{ из огранич. } \Rightarrow a = -2$$

Значит $a \in (-\frac{17}{4}; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; \frac{17}{4})$

Ответ: $a \in (-\frac{17}{4}; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; \frac{17}{4})$

17) Вставим таблицу:

месяц	число	долг, тыс
1	1	618
1	15	$600 - x$
2	1	$1,03(600 - x) = 618,03x$
2	15	$600 - 2x$
3	1	$618 - 2,06x$
... n	15	$200 = 600 - nx$
n+1	1	206
n+1	15	0

Пусть x тыс. сумма, на которую 15-го числа следующего месяца долг должен быть больше, или 15-го числа предыдущего.

Значит, 15-го числа n -го мес. долг будет $600 - nx$
 $600 - nx = 200 \Rightarrow nx = 400$

В $(n+1)$ месяце было выплачено 206 тыс, значит с 1 по n месяц:

$$852 - 206 = 646$$

Выплаты: 1 мес. $618 - (600 - x) = 18 + x$
 2 мес. $618 - 1,03x - (600 - 2x) = 18 + 0,97x$
 3 мес. $618 - 2,06x - (600 - 3x) = 18 + 0,94x$
 ... и т.д. до n мес.

Запишем выплаты за 1- n месяцев.

$$(18+x) + (18+0,97x) + \dots + (18+\dots) = 646$$

n раз

$18n + (x + 0,97x + \dots) = 646$ скобка представляет из себя сумму арифметической прогрессии, где $a_1 = x$; $d = -0,03x$, тогда
 сумма n членов: $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$

$$a_n = a_1 + d(n-1) = a_1 - 0,03xn + 0,03x$$

$$18n + \frac{x + (x - 0,03xn + 0,03x)}{2} \cdot n = 646$$

$$nx = 400 \Rightarrow 18n + \left(\frac{2,03}{2}x - 0,01\right)n = 646$$

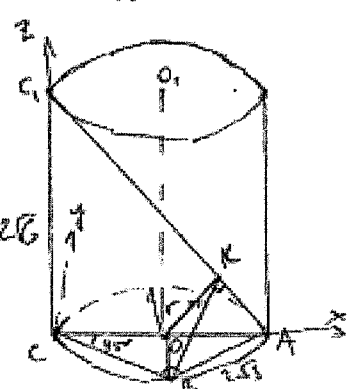
$$12n + \frac{2,03}{2} \cdot 400 = 646$$

$$12n = 240 \Rightarrow n = 20$$

ответ: $n = 20$

14) Дана:
 CC_1 - ось
 AC - диаметр
 $\angle ACB = 45^\circ$
 $AB = 2\sqrt{3}$
 $CC_1 = 2\sqrt{6}$

Решение:



1) $\angle B = 90^\circ$ - опущ на диаметр, $\angle C = 45^\circ$, $\angle A = 45^\circ$
 $\Rightarrow \triangle ABC - \text{пр}$ $\Rightarrow AB = BC = 2\sqrt{3}$

2) по теореме: $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{12 + 12} = 2\sqrt{6}$
 Введем систему координат: $\Rightarrow r = \sqrt{6}$

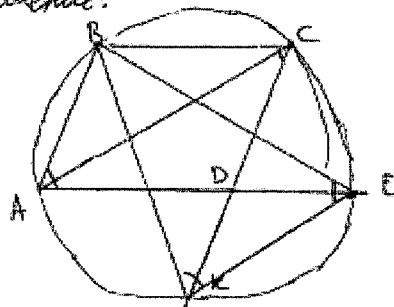
$A(2\sqrt{6}, 0, 0)$, $B(\sqrt{6}, \sqrt{6}, 0)$

$C(0, 0, 0)$, $C_1(0, 0, 2\sqrt{6})$

3) $\vec{AC} \cdot \vec{BC} = |\vec{AC}| \cdot |\vec{BC}| \cdot \cos \alpha$, если из-за памяти $\vec{AC}$ и $\vec{BC} \rightarrow$
 $\Rightarrow \cos \alpha = \frac{\vec{AC} \cdot \vec{BC}}{|\vec{AC}| \cdot |\vec{BC}|} = \frac{|x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} =$
 если $\vec{AC}(x_1, y_1, z_1)$; $\vec{BC}(x_2, y_2, z_2)$
 $= \frac{|2\sqrt{6} \cdot \sqrt{6} + 0 + (-2\sqrt{6}) \cdot 0|}{\sqrt{24 + 0 + 24} \cdot \sqrt{6 + 6 + 0}} = \frac{12}{4\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$ т.е.

16) Дано:
 $ABCD$ — крп,
 $\angle(OC, K) \rightarrow \varphi$
 $\rightarrow \angle ABC = \angle C$
 $AD \cap OC = E$
 $CB \cap OC = K$
 а) $BC = BE$ — ?
 б) $\frac{KE}{AC}$ — ?
 если $\angle AOC = 30^\circ$

Решение:



1) $\angle BCK = \angle BEK$ (опер. на BC)
 2) $\angle BAE = \angle BKE$ (опер. на BE)
 3) $\angle BAE = \angle BCK$ (так как $\angle AOC = 30^\circ$)
 $\Rightarrow \angle BKE = \angle BEK = \alpha \Rightarrow$
 $\triangle BEK - \text{равнобедренный} \Rightarrow BE = EK$
 т.е.

Ответ: № 13 — 2 балла; № 14 — 1 балл; № 15 — 2 балла; № 16 — 1 балл; № 17 — 3 балла; № 18 — 4 балла; № 19 — 2 балла.

Раздел 4. «Организационно-педагогические условия реализации программы»

4.1. Учебно-методическое обеспечение и информационное обеспечение программы

Нормативные документы ГИА-11

1. Федеральный закон от 29.12.2012 № 273-ФЗ «Об образовании в Российской Федерации» (в действующей редакции)
2. Постановление Правительства Российской Федерации от 31.08.2013 № 755 «О федеральной информационной системе обеспечения проведения государственной итоговой аттестации обучающихся, освоивших основные образовательные программы основного общего и среднего общего образования, и приема граждан в образовательные организации для получения среднего профессионального и высшего образования и региональных информационных системах обеспечения проведения государственной итоговой аттестации обучающихся, освоивших основные образовательные программы основного общего и среднего общего образования» (в действующей редакции)
3. Приказ Федеральной службы по надзору в сфере образования и науки от 18.06.2018 № 831 «Об утверждении требований к составу и формату сведений, вносимых и передаваемых в процессе репликации в федеральную информационную систему обеспечения проведения государственной итоговой аттестации обучающихся, освоивших основные образовательные программы основного общего и среднего общего образования, и приема граждан в образовательные организации для получения среднего профессионального и высшего образования и региональные

информационные системы обеспечения проведения государственной итоговой аттестации обучающихся, освоивших основные образовательные программы основного общего и среднего общего образования, а также к срокам внесения и передачи в процессе репликации сведений в указанные информационные системы».

4. Приказ Министерства просвещения Российской Федерации № 190, Федеральной службы по надзору в сфере образования и науки № 1512 от 07.11.2018 «Об утверждении Порядка проведения государственной итоговой аттестации по образовательным программам среднего общего образования».

5. Приказ Федеральной службы по надзору в сфере образования и науки № 1274 от 17.12.2013 «Об утверждении Порядка разработки, использования и хранения контрольных измерительных материалов при проведении государственной итоговой аттестации по образовательным программам основного общего образования и порядка разработки, использования и хранения контрольных измерительных материалов при проведении государственной итоговой аттестации по образовательным программам среднего общего образования» (в действующей редакции).

6. Приказ Федеральной службы по надзору в сфере образования и науки от 26 июня 2019 г. № 876 «Об определении минимального количества баллов единого государственного экзамена, подтверждающего освоение образовательной программы среднего общего образования, и минимального количества баллов единого государственного экзамена, необходимого для поступления в образовательные организации высшего образования на обучение по программам бакалавриата и программам специалитета».

7. Постановление Правительства Москвы №184-ПП от 04.05.2011 «Об утверждении Порядка выплаты и определения размера компенсации работникам, привлекаемым к проведению единого государственного экзамена, за работу по его подготовке и проведению» (в действующей редакции).

8. Приказ Департамента образования города Москвы от 18.05.2018 г. № 190 «О выплате компенсации педагогическим работникам и лицам, осуществляющим обработку экзаменационных работ, участвующим в подготовке и проведении государственной итоговой аттестации по образовательным программам основного общего и среднего общего образования» (в действующей редакции).

9. Приказ Департамента образования города Москвы от 16.10.2018 № 408 «О распределении функций по организации и проведению государственной итоговой аттестации по образовательным программам основного общего и среднего общего образования в 2019 году».

10. Приказ Департамента образования города Москвы от 01.02.2019 г. № 32 «Об утверждении состава комиссии по присвоению статуса эксперта предметных комиссий при проведении государственной итоговой аттестации по образовательным программам среднего общего образования и формы сертификата».

11. Приказ Департамента образования города Москвы от 01.02.2019 г. № 30 «Об утверждении Порядка формирования предметных комиссий при проведении государственной итоговой аттестации по образовательным программам среднего общего образования».
12. Приказ Департамента образования города Москвы от 29.12.2018 г. № 514 «Об утверждении Положения о предметных комиссиях при проведении государственной итоговой аттестации по образовательным программам среднего общего образования».
13. Приказ Департамента образования города Москвы от 28.12.2015 №3586 «Об утверждении Положения о конфликтной комиссии при проведении государственной итоговой аттестации по образовательным программам среднего общего образования» (в действующей редакции).
14. Документы, определяющие структуру и содержание контрольных измерительных материалов единого государственного экзамена в 2020 г.
15. Иные федеральные, ведомственные и региональные нормативные акты, методические материалы по организации и проведению государственной итоговой аттестации по образовательным программам среднего общего образования (обновляются ежегодно).

Основная литература

1. Спецификация контрольных измерительных материалов для проведения в 2020 году единого государственного экзамена по математике – М.: ФИПИ, 2019.
2. Демонстрационный вариант единого государственного экзамена по математике в 2020 году. – М.: ФИПИ, 2019.
3. Кодификатор элементов содержания и требований к уровню подготовки участников экзамена общеобразовательных учреждений для проведения единого государственного экзамена по математике в 2020 году. – М.: ФИПИ, 2019.
4. Семенов А.В. и др. Математика. Профильный уровень. Единый государственный экзамен. Готовимся к итоговой аттестации: [учебное пособие] / под ред. И.В. Ященко. – М.: Издательство «Интеллект-Центр», 2019.
5. Семенов А.В. и др. Математика. Решение заданий повышенного и высокого уровня сложности. Как получить максимальный балл на ЕГЭ. Учебное пособие. – М.: Издательство «Интеллект-Центр», 2018.

Интернет-ресурсы

1. Демонстрации, спецификации, кодификаторы. ФИПИ. – <http://fipi.ru/ege-i-gve-11/demoversii-specifikacii-kodifikatory>.
2. Для предметных комиссий субъектов РФ. ФИПИ. – <http://fipi.ru/ege-i-gve-11/dlya-predmetnyh-komissiy-subektov-rf>.
3. Открытый банк заданий. ФИПИ. – <http://fipi.ru/content/otkrytyy-bank-zadaniy-ege>

4.2. Материально-технические условия реализации программы

Аудитории, оборудованные аудио-, видеоаппаратурой, с доступом к сети Интернет.