

**Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова»
Механико-математический факультет**

УТВЕРЖДАЮ

И. о. декана механико-
математического факультета, проф.

_____ В.Н. Чубариков

" ____ " _____ 2019 г.

**Дополнительная профессиональная программа
(повышение квалификации)**

Математика: задачи с параметрами и другие нестандартные задачи

**Направление – предметные компетенции
Уровень – продвинутый**

Автор курса

Доктор физико-математических наук,
профессор Сергеев Игорь Николаевич

Москва — 2019 г.

Раздел 1. «Характеристика программы»

1.1. Цель реализации программы

Цель программы — совершенствование профессиональных компетенций слушателей в области задач с параметрами и других нестандартных задач (в частности, встречающихся в ЕГЭ).

Совершенствуемые компетенции

№	Компетенция	Направление подготовки Педагогическое образование
		44.03.01
		Код компетенции
		Бакалавриат
1.	Способен осуществлять педагогическую деятельность на основе специальных научных знаний	ОПК-8

1.2. Планируемые результаты обучения

№	Знать – уметь	Направление подготовки Педагогическое образование
		44.03.01
		Код компетенции
		Бакалавриат
1.	Знать: стратегии решения типовых экзаменационных и характерных олимпиадных задач по математике для старшеклассников и выпускников Уметь: решать типовые экзаменационные и характерные олимпиадные задачи по математике для старшеклассников и выпускников	ОПК-8
2.	Знать: современные подходы и алгоритмы решения математических задач с параметрами на экзаменах (в том числе ЕГЭ часть 2) и олимпиадах для старшеклассников и выпускников Уметь: решать математические задачи с параметрами, предлагаемые на экзаменах (в том числе ЕГЭ часть 2) и олимпиадах для старшеклассников и выпускников, применяя различные подходы	ОПК-8
3.	Знать: современные подходы и стратегии решения нестандартных математических задач на экзаменах и олимпиадах для старшеклассников и выпускников	ОПК-8

	Уметь: решать нестандартные математические задачи, предлагаемые на экзаменах и олимпиадах для старшеклассников и выпускников, применяя различные подходы	
4.	Знать: требования к решениям задач по математике на экзаменах (в том числе ЕГЭ) и олимпиадах для старшеклассников и выпускников Уметь: адаптировать условия и решения задач с параметрами к формату ЕГЭ	ОПК-8

1.3. Категория обучающихся/слушателей - уровень образования — ВО, направление подготовки — «Педагогическое образование», область профессиональной деятельности — обучение математике на уровне среднего общего и дополнительного образования.

1.4. Форма обучения— очная.

1.5. Режим аудиторных занятий— 4 часа в день, один день в неделю, в вечернее время.

1.6. Срок освоения (трудоемкость) программы — 72 акад. часа, из них лекций — 16 акад. часов, практических и других форм занятий — 29 акад. часов, самостоятельной работы — 27 акад. часов.

Раздел 2. «Содержание программы»

2.1. Учебный (тематический) план

№ п/п	Наименование разделов (модулей) и тем	Аудиторные учебные занятия, учебные работы			Вне- аудиторная работа	Формы контроля	Трудоемкость
		Всего ауд. ч.	Лек- ции	Практи- ческие и др. формы занятий	с/р		
1	Раздел 1. Входная диагностика	2	0	2	0		2
1.1	Диагностическая работа	2	0	2	0		2
2	Раздел 2. Базовая часть. Школьные экзамены и олимпиады	2	2	0	0		2
2.1	Общие сведения о нестандартных задачах, предлагаемых на ЕГЭ, ДВИ и олимпиадах МГУ	1	1	0	0		1
2.2	Общие сведения о задачах с параметрами, предлагаемых на ЕГЭ, ДВИ и олимпиадах МГУ	1	1	0	0		1
3	Раздел 3. Профильная часть. Основные подходы к решению задач с параметрами и других нестандартных задач	38	14	24	24		62
3.1	Арифметический подход	3	2	1	2	Контрольная работа №1	5
3.2	Алгебраический подход	4	2	2	2	Контрольная работа №2	6
3.3	Логический подход	4	2	2	2	Контрольная работа №3	6
3.4	Функциональный подход	4	2	2	3	Контрольная работа №4	7
3.5	Графический подход	4	2	2	3	Контрольная работа №5	7
3.6	Вероятностный подход	4	2	2	3	Контрольная работа №6	7
3.7	Различные подходы к задачам ЕГЭ	4	0	4	3	Контрольная работа №7	7
3.8	Различные подходы к задачам ДВИ	4	0	4	3	Контрольная работа №8	7

3.9	Различные подходы к задачам олимпиад МГУ	4	0	4	3	Контрольная работа №9	7
3.10	Итоговая характеристика основных разделов школьной математики	3	2	1	0		3
4	Раздел 4. Итоговая аттестация	3	0	3	3		6
4.1	Аттестационная работа	0	0	0	3	Зачет	3
4.2	Итоговая диагностика: диагностическая работа	3	0	3	0		3
Итого		45	16	29	27		72

2.2. Учебная программа

№ п/п	Виды учебных занятий, учебных работ	Содержание
Раздел 1. Входная диагностика		
Тема 1.1 Диагностическая работа	Контрольная работа 2 ак. ч.	Выполнение задания, включающего в себя задачи с параметрами и другие нестандартные задачи
Раздел 2. Базовая часть Школьные экзамены и олимпиады		
Тема 2.1 Общие сведения о нестандартных задачах, предлагаемых на ЕГЭ, ДВИ и олимпиадах МГУ	Лекция 1 ак. ч.	Динамика структуры и содержания ЕГЭ, ДВИ и олимпиад МГУ по математике. Требования к решениям задач по математике на экзаменах (в том числе ЕГЭ) и олимпиадах для старшеклассников и выпускников. Описание различных типов нестандартных задач
Тема 2.2 Общие сведения о задачах с параметрами, предлагаемых на ЕГЭ, ДВИ и олимпиадах МГУ	Лекция 1 ак. ч.	Описание различных типов задач с параметрами. Способы подготовки школьников к успешному их решению. Требования к решениям задач по математике на экзаменах (в том числе ЕГЭ) и олимпиадах для старшеклассников и выпускников.
Раздел 3. Профильная часть Основные подходы к решению задач с параметрами и других нестандартных задач		
Тема 3.1 Арифметический подход	Лекция 2 ак. ч.	Особенности арифметического подхода к решению задач, его различные формы и разновидности
	Практическое занятие 1 ак. ч.	Решение типовых экзаменационных и характерных олимпиадных задач на применение арифметического подхода
	Самостоятельная работа 2 ак. ч.	Решение закрепляющих задач из экзаменов (в том числе ЕГЭ, часть 2) и олимпиад прошлых лет с помощью арифметического подхода (2 ак. ч.)

		Домашняя контрольная работа №1: решение проверочных задач из экзаменов (в том числе ЕГЭ, часть 2) и олимпиад прошлых лет с помощью арифметического подхода (1 ак. ч.)
Тема 3.2 Алгебраический подход	Практическое занятие 1 ак. ч.	Проверка и разбор задач домашнего задания
	Лекция 2 ак. ч.	Особенности алгебраического подхода к решению задач, его различные формы и разновидности
	Практическое занятие 1 ак. ч.	Решение типовых экзаменационных и характерных олимпиадных задач на применение алгебраического подхода
	Самостоятельная работа 2 ак. ч.	Решение закрепляющих задач из экзаменов (в том числе ЕГЭ, часть 2) и олимпиад прошлых лет с помощью алгебраического подхода (2 ак. ч.)
		Домашняя контрольная работа №2: решение проверочных задач из экзаменов (в том числе ЕГЭ, часть 2) и олимпиад прошлых лет с помощью алгебраического подхода (1 ак. ч.)
Тема 3.3 Логический подход	Практическое занятие 1 ак. ч.	Проверка и разбор задач домашнего задания
	Лекция 2 ак. ч.	Особенности логического подхода к решению задач, его различные формы и разновидности
	Практическое занятие 1 ак. ч.	Решение типовых экзаменационных и характерных олимпиадных задач на применение логического подхода
	Самостоятельная работа 2 ак. ч.	Решение закрепляющих задач из экзаменов (в том числе ЕГЭ, часть 2) и олимпиад прошлых лет с помощью логического подхода (2 ак. ч.)
		Домашняя контрольная работа №3: решение проверочных задач из экзаменов (в том числе ЕГЭ, часть 2) и олимпиад прошлых лет с помощью логического подхода (1 ак. ч.)
Тема 3.4 Функциональный подход	Практическое занятие 1 ак. ч.	Проверка и разбор задач домашнего задания
	Лекция 2 ак. ч.	Особенности функционального подхода к решению задач, его различные формы и разновидности
	Практическое занятие 1 ак. ч.	Решение типовых экзаменационных и характерных олимпиадных задач на применение функционального подхода

	Самостоятельная работа 3 ак. ч.	Решение закрепляющих задач из экзаменов (в том числе ЕГЭ, часть 2) и олимпиад прошлых лет с помощью функционального подхода (2 ак. ч.)
		Домашняя контрольная работа №4: решение проверочных задач из экзаменов (в том числе ЕГЭ, часть 2) и олимпиад прошлых лет с помощью функционального подхода (1 ак. ч.)
Тема 3.5 Графический подход	Практическое занятие 1 ак. ч.	Проверка и разбор задач домашнего задания
	Лекция 2 ак. ч.	Особенности графического подхода к решению задач, его различные формы и разновидности
	Практическое занятие 1 ак. ч.	Решение типовых экзаменационных и характерных олимпиадных задач на применение графического подхода
	Самостоятельная работа 3 ак. ч.	Решение закрепляющих задач из экзаменов (в том числе ЕГЭ, часть 2) и олимпиад прошлых лет с помощью графического подхода (2 ак. ч.)
		Домашняя контрольная работа №5: решение проверочных задач из экзаменов (в том числе ЕГЭ, часть 2) и олимпиад прошлых лет с помощью графического подхода (1 ак. ч.)
Тема 3.6 Вероятностный подход	Практическое занятие 1 ак. ч.	Проверка и разбор задач домашнего задания
	Лекция 2 ак. ч.	Особенности вероятностного подхода к решению задач, его различные формы и разновидности
	Практическое занятие 1 ак. ч.	Решение типовых экзаменационных и характерных олимпиадных задач на применение вероятностного подхода
	Самостоятельная работа 3 ак. ч.	Решение закрепляющих задач из экзаменов (в том числе ЕГЭ, часть 2) и олимпиад прошлых лет с помощью вероятностного подхода (2 ак. ч.)
		Домашняя контрольная работа №6: решение проверочных задач из экзаменов (в том числе ЕГЭ, часть 2) и олимпиад прошлых лет с помощью вероятностного подхода (1 ак. ч.)
Тема 3.7 Различные подходы к задачам ЕГЭ	Практическое занятие 4 ак. ч.	Проверка и разбор задач домашнего задания (1 ак. ч.)
		Выработка стратегии решения типовых экзаменационных задач, рассмотрение подходящих алгоритмов решения задач

		из ЕГЭ (часть 2), выявление особенностей применения различных подходов к задачам из ЕГЭ (часть 2), решение задач из ЕГЭ (часть 2) прошлых лет с использованием различных подходов, адаптация решений задач с параметрами к формату ЕГЭ (3 ак. ч.)
	Самостоятельная работа 3 ак. ч.	Решение закрепляющих задач из ЕГЭ (часть 2) прошлых лет с использованием сразу нескольких подходов (2 ак. ч.)
		Домашняя контрольная работа №7: решение задач из ЕГЭ (часть 2) прошлых лет с использованием сразу нескольких подходов; адаптация условий и решений задач с параметрами к формату ЕГЭ (1 ак. ч.)
Тема 3.8 Различные подходы к задачам ДВИ	Практическое занятие 4 ак. ч.	Проверка и разбор задач домашнего задания (1 ак. ч.)
		Выработка стратегии решения типовых экзаменационных задач, рассмотрение подходящих алгоритмов решения задач из ДВИ, выявление особенностей применения различных подходов к задачам из ДВИ, решение задач из ДВИ прошлых лет с использованием различных подходов (3 ак. ч.)
	Самостоятельная работа 3 ак. ч.	Решение закрепляющих задач из ДВИ прошлых лет с использованием сразу нескольких подходов (2 ак. ч.)
		Домашняя контрольная работа №8: решение проверочных задач из ДВИ прошлых лет с использованием сразу нескольких подходов (1 ак. ч.)
Тема 3.9 Различные подходы к задачам олимпиад МГУ	Практическое занятие 4 ак. ч.	Проверка и разбор задач домашнего задания (1 ак. ч.)
		Выработка стратегии решения характерных олимпиадных задач, рассмотрение подходящих алгоритмов решения задач из олимпиад МГУ, выявление особенностей применения различных подходов к задачам олимпиад МГУ, решение задач из олимпиад МГУ прошлых лет с использованием различных подходов (3 ак. ч.)
	Самостоятельная работа 3 ак. ч.	Решение закрепляющих задач из олимпиад МГУ прошлых лет с использованием сразу нескольких подходов (2 ак. ч.)

		Домашняя контрольная работа №9: решение проверочных задач из олимпиад МГУ прошлых лет с использованием сразу нескольких подходов (1 ак. ч.)
Тема 3.10 Итоговая характеристика основных разделов школьной математики	Практическое занятие 1 ак. ч.	Проверка и разбор задач домашнего задания
	Лекция 2 ак. ч.	Полный перечень разделов школьной математики, относящихся к задачам с параметрами, сравнительная характеристика соответствующих математических подходов и алгоритмов решения математических задач с параметрами.
Раздел 4. Итоговая аттестация		
Тема 4.1 Аттестационная работа	Самостоятельная работа 3 ак. ч.	Написание аттестационной работы «Применение комплекса подходов к решению задач с параметрами и других нестандартных математических задач»
Тема 4.2 Итоговая диагностика: диагностическая работа	Контрольная работа 3 ак. ч.	Выполнение задания, включающего в себя задачи с параметрами и другие нестандартные задачи и проверяющего степень усвоения пройденного материала

Раздел 3. «Формы аттестации и оценочные материалы»

3.1. Входная диагностика

Форма проведения входной диагностики: очная.

Оценочные материалы: задачи с параметрами и другие нестандартные задачи из материалов ЕГЭ (часть 2).

Входная диагностика оценивается согласно критериям оценивания выполнения заданий ЕГЭ.

Примерный перечень оценочных материалов для входной диагностики:

1. (ЕГЭ-2016) Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$2^x - a = \sqrt{4^x - a}$$

имеет единственный корень.

2. (ЕГЭ-2013) Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$4(ax - x^2) + \frac{1}{ax - x^2} + 4 = 0$$

имеет ровно два различных корня на промежутке $[-1, 1)$.

3. (ЕГЭ-2011) Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$x^2 - 8x = 2|x - a| - 16$$

имеет ровно три различных корня

3.1. Текущий контроль

Форма текущего контроля: опрос.

По темам 3.1–3.9 в конце каждого практического занятия задается письменное домашнее задание (контрольные работы №1–№9), по которому в начале следующего занятия (через неделю) проводится устный опрос, проверка и разбор.

Примеры задач контрольных работ (примерный перечень оценочных материалов для текущего контроля):

1. Архив фотографий разложен в порядке их нумерации в одинаковые альбомы ровно по 4 фотографии на страницу. При этом 81-я фотография попала на 5-ю страницу одного альбома, а 171-я — на 3-ю страницу другого. Сколько фотографий вмещает один альбом?

2. Найдите наименьшее значение функции

$$f(x) = \frac{2x^2 + x + 1}{3x^2 - x + 2}.$$

3. В группу из 17 детей прислали подарки двух видов: каждый подарок первого вида содержит 4 пряника и 9 конфет, а второго — 3 пряника и 11 конфет. Сначала все пряники разделили поровну между всеми детьми, а потом стали делить поровну и конфеты. Могло ли случиться, что им это сделать не удалось?

4. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$4x - |3x - |x + a|| = 9|x - 1|$$

имеет хотя бы один корень.

5. Найдите наименьшее значение выражения

$$\sqrt{(x - 3)^2 + (y - 4)^2} + |x|.$$

6. В течение четверти учитель по пению ставил ученикам только оценки 1–5. Среднее арифметическое оценок Вовочки за четверть оказалось равно 3,5. Тогда учитель заменил одну его оценку 3 оценками 2 и 4. Увеличилась или уменьшилась после этого средняя оценка Вовочки? Найдите наибольшее возможное её значение после такой замены: а) одной оценки 3; б) всех оценок 3.

7. а) Найдите все значения a , при каждом из которых наименьшее значение функции

$$f(x) = x - 2|x| + |x^2 - 2(a + 1)x + a^2 + 2a|$$

больше -4 .

7. б) Адаптируйте условие и решение следующей задачи к формату ЕГЭ:

Может ли уравнение (относительно x)

$$(x + 1)^4 - (a + 3)(x^2 + 2x) + a^2 + 3a + 1 = 0$$

иметь четыре корня, образующие арифметическую прогрессию?

8. Докажите, что четыре точки пересечения кривых

$$y = x^2 - 2x \quad \text{и} \quad (x/3)^2 + y^2 = 1$$

лежат на одной окружности, и найдите её радиус.

9. На клетчатой бумаге отмечен прямоугольник $m \times n$ клеток. Найдите пару чисел m и n , если они взаимно просты и $n > m > 2$, а диагональ прямоугольника не пересекает ровно 116 его клеток.

3.1. Итоговая аттестация

Форма итоговой аттестации — зачет на основании совокупности выполненных работ, результата аттестационной работы «Применение комплекса подходов к решению задач с параметрами и других нестандартных математических задач» и результата итоговой диагностики.

Оценка: зачет/незачет.

3.1.1. Аттестационная работа

Форма проведения и экспертизы аттестационной работы: заочная.

Оценочные материалы: задачи из пособий [4], [5] или материалов ЕГЭ.

Требования к аттестационной работе:

- выбрать тип задач с параметром и нестандартных задач, относящихся к одной из тем 2.7–2.9;
- указать все подходы из числа разобранных в темах 2.1–2.6, которые применимы к решению выбранного типа задач;
- сделать подборку задач выбранного типа (из содержащихся в пособиях [4], [5] или в материалах ЕГЭ);
- отобрать из сделанной подборки одну демонстрационную задачу с параметром;
- адаптировать выбранную задачу к формату ЕГЭ;
- записать несколько решений демонстрационной задачи, использующих каждый из указанных подходов соответственно, или одно решение, использующее эти подходы последовательно, на разных этапах решения (адаптируя к формату ЕГЭ);
- сравнить использованные подходы по их естественности, сложности и трудоемкости или, соответственно, обосновать естественность и необходимость их использования на разных этапах решения;
- оформить полученные материалы в виде текстового файла в MS Word.

Аттестационная работа оценивается положительно (ставится оценка «зачет») при условии, что в ней присутствуют следующие позиции:

- выбран тип задач с параметром и нестандартных задач, сделана их подборка и отобрана демонстрационная задача;
- перечислены все подходы, применимые к решению задач выбранного типа, и представлены либо несколько решений демонстрационной задачи, либо одно её решение с использованием всех перечисленных подходов.
- условие и решение выбранной задачи адаптировано к формату ЕГЭ.

Аттестационная работа оценивается отрицательно (ставится оценка «не зачет»), если какая-либо из перечисленных выше позиций не выполнена.

3.1.2. Итоговая диагностика

Форма проведения итоговой диагностики: очная.

Оценочные материалы: задачи с параметрами и другие нестандартные задачи из материалов ЕГЭ (в том числе часть 2), экзаменов и олимпиад прошлых лет.

Итоговая диагностика оценивается согласно критериям оценивания выполнения заданий ЕГЭ.

Примерный перечень оценочных материалов для итоговой диагностики:

1. (ЕГЭ–2016) Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{x^4 - x^2 + a^2} = x^2 + x - a$$

имеет ровно три различных корня.

2. (ЕГЭ–2013) Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$x^2 + (a - 7)^2 = |x + 3 - a| + |x - 3 + a|$$

имеет единственный корень.

3. (ЕГЭ–2014) Найдите все значения a , при каждом из которых неравенство

$$\log_a \left(\frac{3 + 2x^4}{1 + x^4} \right) + \log_a \left(\frac{5 + 4x^4}{1 + x^4} \right) > 1$$

выполняется для всех x .

1. (ЕГЭ–2015) Найдите все значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} y = 2 + \sqrt{5 + 4x - x^2} \\ y = a + \sqrt{9 - a^2 + 2ax - x^2} \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Раздел 4. «Организационно-педагогические условия реализации программы»

4.1. Учебно-методическое обеспечение и информационное обеспечение программы

Литература:

1. Ященко И.В., Волчкевич М.А., Высоцкий И.Р., Гордин Р.К., Семёнов П.В., Косухин О.Н., Фёдоровых Д.А., Суздальцев А.И., Рязановский А.Р., Сергеев И.Н., Смирнов В.А., Трепалин А.С., Хачатурян А.В., Шестаков С.А.,

Шноль Д.Э. ЕГЭ 2019. Математика. Профильный уровень. 36 вариантов. Типовые тестовые задания от разработчиков ЕГЭ и 800 заданий части 2. — М.: Экзамен, МЦНМО, 2019. — 239 с.

2. Зеленский А.С., Козко А.И., Панфёров В.С., Сергеев И.Н., Шейпак И.А. Олимпиада «Покори Воробьевы горы!». Математика (2013–2018). —

М.: МЦНМО, 2019. — 192 с.

3. Бегунц А.В., Бородин П.А., Горяшин Д.В., Зеленский А.С., Панфёров В.С., Сергеев И.Н., Шейпак И.А. Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике (2005–2019). — М.: МЦНМО, 2019. — 232 с.

4. Панфёров В.С., Сергеев И.Н. Математика. ЕГЭ: Математика. 1000 задач с ответами и решениями. Все задания части 2. — М.: Экзамен, 2017. — 336 с.

5. Козко А.И., Панфёров В.С., Сергеев И.Н., Чирский В.Г. Задачи с параметрами, сложные и нестандартные задачи. — М.: МЦНМО, 2019. — 232 с.

6. Сергеев И.Н. Математика: задачи с ответами и решениями — М.: КДУ, 2013. — 360 с.

4.2. Материально-технические условия реализации программы

Занятия происходят в аудитории 13-06 механико-математического факультета МГУ, имеющей меловую доску и достаточное количество (более 60) посадочных мест для слушателей. Для проведения отдельных занятий может использоваться аудитория 15-04, оснащённая мультимедийной аппаратурой.

Программные, методические и контрольные материалы, необходимые для учебного процесса, раздаются слушателям в бумажном виде или рассылаются по электронной почте.