

Министерство образования и науки РФ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего
образования «Национальный исследовательский университет
«Московский институт электронной техники»

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по УР
Игнатова И.Г.

« ____ » _____ 2016 г.

ПРОГРАММА ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ
«Задачи по математике для кружковой работы
и подготовки к олимпиадам»

Москва – 2016

1. Характеристика программы

1.1. Цель реализации программы

Совершенствование компетенций учителей математики общеобразовательной организации, их практических навыков решения задач.

№ п/п	Компетенции	Направление подготовки Педагогическое образование		
		44.03.01 (44.03.05)		44.04.01
		Код компетенции		
		Бакалавриат		Магистратура
		4 года	5 лет	
1.	Способен использовать современные методы и технологии обучения и диагностики	ПК-2	ПК-2	
2.	Способен использовать возможности образовательной среды для достижения личностных, метапредметных и предметных результатов обучения и обеспечения качества учебно-воспитательного процесса средствами преподаваемого учебного предмета	ПК-4		
3.	Готов использовать систематизированные теоретические и практические знания для постановки и решения исследовательских задач в области образования	ПК-11	ПК-11	

1.2 Планируемые результаты обучения

№ п/п	Знать	Направление подготовки Педагогическое образование		
		44.03.01 (44.03.05)		44.04.01
		Код компетенции		
		Бакалавриат		Магистратура
		4 года	5 лет	
1.	Основные понятия и методы алгебры, геометрии и математического анализа	ПК-2		
2.	Основные методики к решению задач по темам	ПК-4	ПК-2	
3.	Основные изменения в структуре и форме проведения ЕГЭ в части заданий повышенной сложности и имеющиеся нормативные документы	ПК-2	ПК-2	
4.	Необходимые информационные ресурсы и технологии	ПК-11	ПК-11	
Уметь		Бакалавриат		Магистратура
		4 года	5 лет	
1.	Применять основные понятия и методы алгебры, геометрии, комбинаторного и математического анализа	ПК-2		
2.	Решать математические задачи с использованием логических, комбинаторных и геометрических методов	ПК-4	ПК-2	
3.	Применять алгебраические и геометрические методы для решения прикладных задач	ПК-4	ПК-2	
4.	Осуществлять поиск и разрабатывать задания для учащихся, учитывая их склонности и способности	ПК-4		
5.	Осуществлять руководство проектно-исследовательской деятельностью учащихся.	ПК-11	ПК-11	

II. СОДЕРЖАНИЕ ПРОГРАММЫ

Учебный план

программы повышения квалификации

«Задачи по математике для кружковой работы и подготовки к олимпиадам»

Цель – повышение профессиональной компетентности и формирование практических навыков решения задач преподавателей математики средней школы.

Категория слушателей – учителя математики 9 – 11 классов общеобразовательных организаций.

Срок обучения – 72 часа.

Форма обучения – без отрыва от работы.

№ п/п	Наименование Разделов	Всего часов	В том числе	
			лекции	практические занятия
1	Теоретико-множественные основы математики. Математическая логика	6	4	2
2	Метод математической индукции. Комбинаторика	6	3	3
3	Принцип Дирихле. Инварианты	4	2	2
4	Делимость чисел. Сравнения	10	5	5
5	Рекуррентные уравнения	4	2	2
6	Векторы. Система координат	10	5	5
7	Геометрические преобразования	6	4	2
8	Сечения многогранников	6	4	2
9	Векторное и смешанное произведение векторов	4	2	2
10	Применение математического анализа	6	4	2
11	Уравнения и неравенства с параметрами	10	5	5
Итоговая аттестация:		Зачет		
Итого		72	40	32

УЧЕБНО-ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН программы повышения
квалификации
«Задачи по математике для кружковой работы и подготовки к олимпиадам»

№ п/п	Наименование разделов и темы	Всего, часов	В том числе		Форма контроля
			Лекции	Практические занятия	
1. Теоретико-множественные основы математики. Элементы математической логики					
1.1	Математика как основа инженерных и естественных наук. Проникновение математики в гуманитарные науки	1	1		Собеседование
1.2	Множества и действия над ними. Отображения множеств. Отношения между элементами множеств	2	1	1	
1.3	Аксиоматический метод. Примеры аксиоматических систем. Аксиомы Пеано натуральных чисел. Различные подходы к понятию действительного числа	1	1		
1.4	Высказывания и действия над ними. Логические законы. Логические задачи	2	1	1	
2. Метод математической индукции. Комбинаторика					
2.1	Метод математической индукции и его модификации	2	1	1	Зачёт
2.2	Размещения и сочетания с повторениями и без повторений	2	1	1	
2.3	Бином Ньютона. Полиномиальная формула	2	1	1	
3. Принцип Дирихле. Инварианты					
3.1	Принцип Дирихле	2	1	1	Зачёт
3.2	Метод инвариантов	2	1	1	

4. Делимость чисел. Сравнения					
4.1	Простейшие задачи на делимость чисел	2	1	1	Зачёт
4.2	Сравнения	2	1	1	
4.3	Простые числа и их свойства. Основная теорема арифметики	1	1		
4.4	Диофантовы уравнения	2	1	2	
4.5	Текстовые задачи с целыми числами	3	1	1	
5. Рекуррентные уравнения					
5.1	Рекуррентные уравнения	4	2	2	Доклад или реферат
6. Векторы. Система координат					
6.1	Векторы: коллинеарность и компланарность. Разложение по базису	4	2	2	Зачёт
6.2	Скалярное произведение векторов	4	2	2	
6.3	Аффинная (косоугольная) система координат.	2	1	1	
7. Геометрические преобразования					
7.1	Движения и гомотетии (плоскости и пространства). Преобразования подобия	3	2	1	Доклад или реферат
7.2	Аффинные преобразования	3	2	1	
8. Сечения многогранников					
8.1	Построение сечений многогранников	3	2	1	Зачёт
8.2	Вычисление площадей сечений многогранников	3	2	1	
9. Векторное и смешанное произведение векторов					
9.1	Векторное произведение векторов	2	1	1	Зачёт
9.2	Смешанное произведение векторов	2	1	1	

10. Применение математического анализа					
10.1	Наибольшие и наименьшие значения функций	2	1	1	Зачёт
10.2	Использование монотонности функции	1	1		
10.3	Использование выпуклости функций	1	1		
10.4	Использование интеграла для вычисления площадей и объёмов	2	1	1	
11. Уравнения и неравенства с параметрами					
11.1	Графики функций. Преобразование графиков. Множества на плоскости	4	2	2	Зачёт
11.2	Решение уравнений, неравенств и систем с параметрами	6	3	3	
ИТОГО		72	40	32	

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

В современных условиях непрерывного научно-технического прогресса, созданием новых высоких технологий и всеобщей компьютеризации всех сторон общественной жизни роль математики как фундамента большинства научных исследований неуклонно возрастает. Задача школьной математики в основном состоит в том, чтобы вооружить учащихся элементарными знаниями, необходимыми в любой области человеческой деятельности. Вместе с тем многие школьники способны на гораздо большее, чем овладение простейшими умениями и навыками. Решение задач повышенной сложности, олимпиадных задач, конкурсных задач в ведущие вузы, трудных задач единого государственного экзамена позволит существенно увеличить кругозор ученика и облегчит становление творческой личности, которая в будущем будет решать важные научные и народнохозяйственные задачи. Данная программа подготовки учителей призвана помочь учителю в работе с учащимися, желающими и способными повысить свой уровень освоения математических методов. При этом, чтобы не допустить значительных перегрузок учащихся и одновременно обучить их сложнейшим приёмам и умению проводить тонкие рассуждения, следует объединять несколько разрозненных частных методов и понятий в обобщённые, концентрировать внимание школьников на более общих подходах к решению задач.

Авторы данной программы старались составить её так, чтобы учителю была ясна увеличивающаяся роль математики в современном мире, необходимость донести её результаты до школьника (включая даже те, которые получены в последнее время), убедив его в необходимости изучения математики. Кроме того, сообщить учителю в концентрированном виде некоторые методы решения трудных задач.

Данный цикл занятий преследует следующие цели:

- Ознакомление слушателей с современным состоянием математической науки, её проблемами и достижениями.
- Формирование у школьного учителя целостного представления о математике и её месте в общем здании современной науки.
- Ознакомление слушателей с общими методами решения широкого круга задач.

В данном курсе повышения квалификации учителей предполагается наряду с традиционными лекционно-семинарскими формами проведения занятий использовать занятия дискуссионного характера, в которых обсуждаются насущные проблемы преподавания математики в средней школе, и занятия в форме докладов участников. Слушателям будут предложены темы докладов и рефератов.

УЧЕБНАЯ ПРОГРАММА

«Задачи по математике для кружковой работы и подготовки к олимпиадам»

1. Аксиоматический метод в математике и её теоретико-множественные основы

Тема 1.1. Математика как основа инженерных и естественных наук.

Проникновение математики в гуманитарные науки

Необычайно широкая область применимости математического знания объясняется тем, что математика абстрагируется от конкретной природы объектов, которыми она оперирует. Например, пересечение двух множеств определяется независимо от того, из чего составлены множества: из чисел, векторов, многочленов, людей, городов, предприятий и т.д. Математика – основа физических и других естественных наук. В инженерных науках роль математики весьма велика. Широко известно, что разные процессы могут быть описаны одними и теми же уравнениями (например, процесс распространения тепла и процесс диффузии). Решив эти

уравнения, мы сможем получить большую информацию о протекаемом процессе, в частности, спрогнозировать состояние объектов в будущем.

Тема 1.2. Множества и действия над ними. Отображения множеств. Отношение между элементами множеств.

Над множествами так же, как над числами, можно производить различные действия. Наиболее распространёнными операциями над множествами являются пересечение, объединение и вычитание. Свойства этих операций во многом похожи на свойства арифметических операций над числами, но имеют и существенные отличия от них. Теоретико-множественный подход можно применить к ряду текстовых задач (с использованием и без использования формулы включений и исключений).

Отображение множеств – это понятие, обобщающее понятие числовой функции. Рассматриваются отображения, являющиеся вложениями, наложениями, взаимно однозначными отображениями. Отношения между элементами множества (например, равенство на произвольном множестве, делимость, отношение "больше или равно" на множестве натуральных чисел, отношения параллельности и перпендикулярности на множестве прямых) могут являться объектом рассмотрения математической теории. Особенно важную роль играют бинарные отношения, а среди них – отношения порядка и отношения эквивалентности.

Тема 1.3. Аксиоматический метод. Примеры аксиоматических систем. Преимущества и недостатки аксиоматического введения понятий. Аксиомы Пеано натуральных чисел. Различные подходы к понятию действительного числа.

Аксиоматические системы встречаются не только в математике. Например, изложение теоретической механики, а также многих физических теорий, часто проводится аксиоматически. Аксиоматическая теория множеств – это надежда на то, что антиномии теории множеств (противоречия) будут преодолены. Простота, возможность получения глубоких результатов, а также возможность построения автоматических доказательств (т.е. поручить доказательства утверждений можно специальному механическому устройству, например, компьютеру) делают аксиоматическое изложение теории весьма привлекательным. Однако, у него есть свои ограничения и недостатки.

Первой аксиоматической системой была геометрия Евклида. Аксиомы Евклида до сих пор лежат в основе школьного курса геометрии. В математической логике, изучающей

аксиоматические системы, естественно возникают вопросы о противоречивости, полноте построенной системы, зависимости одних аксиом от других и т.д. На протяжении многих сотен лет людей интересовал вопрос о том, можно ли пятый постулат Евклида (аксиому параллельности) вывести из других аксиом. Лишь в 19 в. было доказано, что это невозможно. Это сделал Н.И.Лобачевский, доказав, что пятый постулат невозможно вывести из других аксиом Евклида, и создав неевклидову Геометрию – геометрию Лобачевского, в которой пятый постулат Евклида неверен.

Натуральные числа можно вводить аксиоматически, например, с помощью аксиом Пеано. Гораздо более сложным является понятие действительного числа, введение которого может быть осуществлено несколькими различными способами, каждый из которых имеет свои достоинства и недостатки.

Тема 1.4. Высказывания и действия над ними. Логические законы. Логические задачи

Высказывание (или утверждение, предложение) – это некоторое суждение о рассматриваемых объектах. Оно может быть истинным или ложным. Над высказываниями так же, как над числами или множествами, можно производить действия, строить из одного или нескольких высказываний новое высказывание. Такими действиями являются, в частности, отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, импликация. Любое равенство, связывающее высказывания и справедливое при всех высказываниях, в него входящих, называется тождеством, а наиболее важные тождества называются логическими законами. К ним относятся закон двойного отрицания, законы коммутативности, ассоциативности, дистрибутивности, идемпотентности, законы де Моргана, закон исключённого третьего и многие другие. Большинство логических законов было сформулировано ещё Аристотелем. Логическая символика позволяет существенно сократить запись высказывания, легче с ними оперировать. Оказывается, что логические задачи можно решать, составляя логические уравнения или системы логических уравнений. Добавление к символам логических операций кванторов позволяет существенно расширить круг высказываний, допускающих формализацию.

2. Метод математической индукции. Комбинаторика

Тема 2.1. Метод математической индукции и его модификации

Дедукция и индукция – два метода, которые используются в науке для установления

истины. При дедуктивном подходе рассуждения проводятся "от общего к частному", а при индуктивном подходе – "от частного к общему". Математика – наука дедуктивная, и единственное место в математике, где рассуждения проводятся индуктивно – это метод математической индукции. Принцип математической индукции обычно не доказывают, он является одной из аксиом (например, аксиомой в системе аксиом Пеано натуральных чисел). Методом математической индукции можно обосновывать строго ряд математических формул (например, формулу суммы членов арифметической или геометрической прогрессии. Модификации принципа математической индукции – это утверждения, близкие к нему: например, иногда индуктивные рассуждения проводят, начиная не с $n=1$, а с $n=n_0$, а индуктивный переход осуществлять не от предыдущего к следующему, а от всех предыдущих к данному. Так может быть доказана, например, теорема о возможности разложения натурального числа на простые множители.

Тема 2.2. Размещения и сочетания с повторениями и без повторений

Основные правила комбинаторики: правило суммы и правило произведения. Часто их путают, что приводит к неправильному решению. Здесь необходимо продемонстрировать применение этих правил, подчеркнуть, в каких случаях применяется одно, а в каких другое. Эти правила позволяют вывести формулы числа размещений с повторениями и без повторений, числа перестановок и числа сочетаний с повторениями и без повторений. С помощью комбинаторных методов можно вычислять количество подмножеств множества, обладающих теми или иными свойствами, количество отображений, разбиений и т.д. В частности, количество всех подмножеств множества из n элементов равно 2^n .

Тема 2.3. Бином Ньютона. Полиномиальная формула

Биномиальные коэффициенты C_n^k обладают рядом замечательных свойств. Из комбинаторных соображений нетрудно доказать формулу бинома Ньютона, которая обобщает хорошо известные формулы квадрата суммы и квадрата разности двух чисел. Формула бинома Ньютона обобщается до полиномиальной формулы. Участвующие в ней коэффициенты называются полиномиальными коэффициентами. Они обобщают понятие биномиального коэффициента.

3. Принцип Дирихле. Инварианты

Тема 3.1. Принцип Дирихле

Принцип Дирихле – весьма наглядное утверждение, состоящее в том, что если $n + 1$ предмет разложить в n ящиков, то хотя бы в одном ящике окажется более одного предмета. Несмотря на простоту и наглядность, принцип Дирихле часто применяется в решениях математических задач. На нём основаны многие олимпиадные задачи. Принцип Дирихле обобщается в разных направлениях, он послужил появлению такого важного комбинаторного понятия, как числа Рамсея.

Тема 3.2. Метод инвариантов

Для того, чтобы считать доказанным какое-либо утверждение, можно привести его доказательство. А как доказать, что утверждение не может быть доказано, или доказать, что не существует объекта, удовлетворяющего заданным условиям, или доказать невозможность осуществления преобразований, переводящих данный объект в другой? Одним из способов является нахождение инварианта, который сохраняется при всех допустимых преобразованиях, но имеет разные значения для объектов, которые мы хотим перевести один в другой. Инвариантом может быть чётность или нечётность, какое-либо число, свойство и т.д. Инварианты следует искать в олимпиадных задачах игрового содержания

4. Делимость чисел. Сравнения

Тема 4.1. Простейшие задачи на делимость чисел

Многие задачи на делимость чисел используют лишь самые элементарные свойства целых чисел. Например, если числа a и b делятся на c , то $a + b$ тоже делится на c и т.д. Существует много задач, где нужно подобрать число, если его цифры удовлетворяют тем или иным требованиям.

Тема 4.2. Сравнения

Сравнимость по модулю заданного натурального числа – это отношение эквивалентности на множестве целых чисел. Отметив свойства сравнений и доказав их, можно перейти к применению теории сравнений. Спектр применения очень широкий: это вычисление остатков от деления громоздко записываемых чисел на какое-либо натуральное число, доказательство признаков делимости чисел на 3, 4, 5, 7, 11 и т.д. Часто остаток от деления чисел на фиксированное натуральное число служит инвариантом, позволяющим доказать невозможность тех или иных преобразований. С помощью теории сравнений доказываются малая теорема Ферма, теорема Эйлера, теорема Вильсона и многие другие.

Тема 4.3. Простые числа и их свойства. Основная теорема арифметики

Простые числа – это интереснейший объект, привлекавший математиков с древних времён. Многие загадки, связанные с простыми числами, не разгаданы до сих пор. Ещё Евклид доказал, что простых чисел бесконечно много. С простыми числами связано много олимпиадных задач самого разного уровня сложности. Используя свойства простых чисел и теорию сравнений, можно доказать основную теорему арифметики: любое натуральное число, начиная с 2, единственным образом раскладывается в произведение простых чисел.

Тема 4.4. Диофантовы уравнения

Диофантовым уравнением называется всякое уравнение с целочисленными переменными. Линейное диофантово уравнение с двумя неизвестными имеет вид $ax + by = c$. Условия его разрешимости и общее решение легко получить с помощью теории сравнений. Кроме того, общее решение может быть найдено с помощью алгоритма Евклида нахождения наибольшего общего делителя двух целых чисел. Теория линейных диофантовых уравнений позволяет решить вопрос о решении системы сравнений и доказать китайскую теорему об остатках. Нелинейные диофантовы уравнения исследуются гораздо труднее, чем линейные. Среди них можно выделить уравнение Пелля $x^2 - Ay^2 = 1$ и уравнение $x^2 - Ay^2 = 1$, определяющее пифагоровы тройки чисел. Часто требуется найти не все решения диофантова уравнения, а те, которые удовлетворяют определённым требованиям, например, решить в натуральных числах. Как правило, их несложно отобрать среди всех решений.

Тема 4.5. Текстовые задачи с целыми числами

Требование, чтобы переменные были целочисленными, является часто довольно сильным и существенно упрощает решение задачи. Игнорирование целочисленности переменных иногда делает задачу невыполнимой. В большинстве задач с целочисленными переменными при решении достаточно использовать лишь самые элементарные свойства целых чисел, но в некоторых – более тонкие (например, разложение на простые множители). В некоторых задачах ответ может быть получен перебором возможных случаев. Следует рассмотреть некоторые методы “усиления” составляемых для целочисленных переменных неравенств. Например, если x, y – целые числа, то, скажем, неравенство $x < y - 5$ можно усилить, заменив его неравенством $x \leq y - 6$. В ряде случаев этот приём позволяет существенно сократить перебор. Иногда в текстовой задаче полезно сделать рисунок,

построить график или применить теоретико-множественные понятия (пересечение, объединение, разность).

Данная тема может быть расширена, если включить в неё теоремы элементарной теории чисел.

5. Рекуррентные уравнения

Говорят, что последовательность чисел задана рекуррентно, если указан способ получения следующего числа через предыдущие: $a_n = f(a_1, \dots, a_{n-1})$. В ряде случаев на основании рекуррентной формулы может быть получена явная формула общего члена последовательности: $a_n = \varphi(n)$. К числу таких случаев относятся линейные рекуррентные уравнения, скажем, линейное однородное рекуррентное уравнение второго порядка: $x_n = px_{n-1} + qx_{n-2}$, общее решение которого можно получить в виде линейной комбинации решений вида $x_n = \lambda^n$ или (в случае кратных корней характеристического уравнения) вида $x_n = n\lambda^n$. Чтобы последовательность была определена однозначно, здесь должны быть заданы начальные условия: $x_1 = a$, $x_2 = b$. Например, последовательность чисел Фибоначчи определяется рекуррентным уравнением $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$ и начальными условиями $x_1 = x_2 = 1$. С помощью подбора частного решения могут быть решены и некоторые неоднородные рекуррентные уравнения, например, уравнения вида $x_n = px_{n-1} + qx_{n-2} + 3n + 2^n + 1$.

6. Векторы. Система координат

Тема 6.1. Векторы: коллинеарность и компланарность. Разложение по базису

Базисом векторов на плоскости называется любая пара $\vec{a}, \vec{b}$ неколлинеарных векторов, а базисом векторов пространства (трёхмерного) называется любая тройка $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ векторов пространства. Любой вектор $\vec{v}$ плоскости единственным образом разлагается по базису $\vec{a}, \vec{b}$, т.е. представляется в виде $\vec{v} = x\vec{a} + y\vec{b}$, а любой вектор пространства единственным образом представляется в виде $\vec{v} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$. Единственность разложения по базису служит источником многих конкретных равенств, связывающих векторы, и позволяет решить ряд задач. Простейшим способом разложения вектора по базису в конкретных задачах может являться однократное или многократное применение правила трёх точек: $\vec{MN} + \vec{NP} = \vec{MP}$.

Тема 6.2. Скалярное произведение векторов

Скалярное произведение векторов – это мощный инструмент для решения геометрических задач. Используя свойства скалярного произведения, можно доказывать теоремы, вычислять длины векторов, проекции вектора на вектор, углы между векторами. Особенно успешно скалярное произведение применяется для вычисления расстояний: расстояния от точки до прямой, до плоскости, расстояния между скрещивающимися прямыми. Преимущество использования скалярного произведения состоит в том, что не нужно будет делать дополнительные построения. Задачи на скалярное произведение можно условно подразделить на два типа: задачи, в которых векторы используются сами по себе (без координат) и задачи, в которых исходные векторы заданы своими координатами в некоторой прямоугольной системе координат. Конечно, если система координат не задана, то часто в задаче удобно ввести систему координат самостоятельно, причём вычисления будут проще, если система координат выбрана удачно.

Тема 6.3. Аффинная (косоугольная) система координат

Прямоугольная система координат не всегда удобна для использования в геометрических задачах. Часто более удобной является косоугольная, или аффинная система координат, так как она теснее связана с рассматриваемыми объектами. Например, в задачах с наклонным параллелепипедом удобно выбрать систему координат, у которой начало координат находится в одной из вершин параллелепипеда, а базисные векторы направлены по его рёбрам. При этом следует иметь в виду, что некоторые формулы, справедливые в прямоугольной системе координат, перестают быть справедливыми в аффинной системе. Аффинная система координат может быть также успешно применена к задачам, в которых требуется определить, в каком отношении тот или иной отрезок делится прямой или плоскостью, а также в задачах, где требуется определить отношение площадей или объёмов.

7. Геометрические преобразования

Тема 7.1. Движения и гомотетии (плоскости и пространства). Преобразования подобия

Движение – отображение, сохраняющее расстояние между любыми двумя точками. Примерами движений плоскости являются параллельный перенос, поворот вокруг

фиксированной точки на фиксированный угол, а также симметрия относительно прямой. Симметрия относительно точки – это поворот на 180° вокруг этой точки. Произведением движений является последовательное выполнение этих движений. Очевидно, произведение движений также является движением. В пространстве наряду с перечисленными преобразованиями движениями являются повороты вокруг прямых и симметрии относительно плоскостей. Использование движений часто бывает полезным при решении геометрических задач, как задач на вычисление, так и задач на доказательство и задач на построение. Движения подразделяются на два вида: движения первого рода, т.е. движения, сохраняющие ориентацию, и движения второго рода – изменяющие ориентацию на противоположную. Часто бывает полезным использовать следующие факты: всякое движение плоскости является произведением параллельного переноса и поворота на некоторый угол вокруг произвольным образом выбранной точки. Кроме того, в задачах иногда полезно использовать теорему Шаля: любое движение плоскости первого рода является параллельным переносом или поворотом. В пространстве имеют место аналогичные теоремы, но их формулировка более громоздкая.

Гомотетии плоскости или пространства также удобно бывает применить в геометрических задачах, особенно в задачах на построение. Произведение движений и гомотетий – это преобразования подобия. Часто задача существенно упрощается, если применить к рассматриваемым фигурам преобразование подобия. При этом следует иметь в виду, что отношение линейных размеров подобных фигур (например, отношение соответствующих медиан или биссектрис подобных треугольников) равно k (где k – коэффициент подобия), отношение площадей равно k^2 , а отношение объёмов подобных фигур равно k^3 .

Тема 7.2. Аффинные преобразования

В ряде геометрических задач применение преобразований подобия невозможно, но задача может быть успешно решена, если применить преобразование, искажающее фигуры. Например, “выпрямить” наклонный параллелепипед, “растянуть” его рёбра с разными коэффициентами растяжения и т.д. Здесь нам помогут аффинные преобразования, т.е. взаимно однозначные преобразования (плоскости или пространства), сохраняющие прямые. Аффинные преобразования так же, как движения, бывают первого и второго рода. Запись аффинного преобразования в координатах (в аффинной или прямоугольной системе координат) состоит из линейных равенств. Аффинные преобразования обладают рядом замечательных свойств. В

частности, произведение аффинных преобразований является аффинным преобразованием, аффинное преобразование плоскости увеличивает все площади в одно и то же количество раз, а аффинное преобразование пространства увеличивает в одно и то же число раз объёмы фигур. Все эти факты успешно используются в решении задач. Например, совсем просто можно получить формулу площади эллипса. Многие задачи на построение решаются намного проще, если применить аффинное преобразование. Наряду с аффинными преобразованиями (линейными) можно рассматривать проективные преобразования (дробно-линейные). Круг решаемых задач при этом будет ещё большим.

Тема 7.3. Инверсия

Инверсия, т.е. симметрия относительно окружности – мощное средство для решения геометрических задач. Часто бывает удобно применить инверсию, если мы хотим перевести окружности в прямые с сохранением их свойств (например, перпендикулярности). После такого перевода задача упрощается, так как с прямыми работать легче, чем с окружностями. С помощью инверсии решается задача Аполлония о построении окружности, касающейся трёх данных. Кроме того, инверсия позволяет сравнительно легко доказать теорему Мора – Маскерони о том, что любое построение, осуществляемое циркулем и линейкой, может быть сделано одним циркулем. Инверсия имеет тесные связи с геометрической теорией комплексных чисел, с неевклидовыми геометриями (в частности, в модели Пуанкаре геометрии Лобачевского движениями являются определённого вида инверсии).

8. Сечения многогранников

Тема 8.1. Построение сечений многогранников

В задачах на построение сечений многогранников активно участвуют многие аксиомы и теоремы о взаимном расположении прямых и плоскостей в пространстве (в частности, признаки параллельности прямой и плоскости, двух плоскостей). Кроме того, решение задач на построение сечений очень полезно, так как здесь весьма велика творческая составляющая: надо догадаться о том, какие сделать построения на проекционном чертеже, часто здесь приходится делать весьма замысловатые дополнительные построения. Обоснование сделанных построений, доказательство того, что они обладают требуемыми свойствами, также необходимо и требует хорошего владения теоретическим материалом.

Наиболее распространёнными задачами на построение сечений являются следующие:

- 1) построить сечение многогранника, проходящее через три заданные точки;
- 2) построить

сечение плоскостью, проходящей через две заданные точки параллельно заданной прямой и 3) построить сечение, проходящее через заданную точку и параллельное двум заданным прямым. При этом приходится решать на проекционном чертеже задачу о нахождении точки пересечения прямой и плоскости и построении линии пересечения двух плоскостей. В случае, если проекционный чертёж несёт бóльшую информацию о фигуре (например, известно, что она является правильной пирамидой), то можно решать задачи о построении сечения, перпендикулярного данной прямой или данной плоскости.

Тема 8.2. Вычисление площадей сечений многогранников

Задачи на вычисление площадей сечений неразрывно связаны с задачами на построение сечений, так как информация о том, как построено сечение, часто играет решающую роль для вычисления площади сечения. Для нахождения площадей сечений можно использовать векторы (как в координатах, так и без координат). Если многоугольник, полученный в сечении, подобен другому многоугольнику с известной площадью, то можно использовать известные факты о связи площадей подобных фигур.

9. Векторное и смешанное произведение векторов

Тема 9.1. Векторное произведение векторов

Многие задачи элементарной геометрии могут быть успешно и быстро решены с помощью векторного произведения векторов. Оно позволяет вычислять площади фигур, находить векторы, перпендикулярные двум заданным и т.д. Алгебраические свойства векторного произведения существенно отличаются от других операций: обычного произведения чисел, скалярного произведения векторов и т.д. Основное отличие состоит в том, что векторное произведение $[a, b]$ векторов **a** и **b** некоммукативно, т.е. $[b, a] \neq [a, b]$. Зато оно антикоммукативно: $[b, a] = -[a, b]$, и этот факт активно используется при работе с векторным произведением.

Тема 9.2. Смешанное произведение векторов

Наряду с векторным произведением в задачах по геометрии полезно использование смешанного произведения трёх векторов. Смешанное произведение применяется для вычисления объёмов многогранников, с его помощью сравнительно просто находится расстояние между скрещивающимися прямыми. Кроме того, смешанное произведение (в отличие от скалярного и векторного) легко вычисляется в косоугольной системе координат.

10. Применение математического анализа

Тема 10.1. Наибольшие и наименьшие значения функций

Отыскание наибольших и наименьших значений функций может быть осуществлено разными методами. Если выражение является квадратичным, то его следует преобразовать с помощью выделения полного квадрата, после чего оценивать выражение будет несложно. Если выражение содержит знак модуля, следует раскрыть модуль, рассмотрев несколько случаев в отдельности. Часто оценка выражения может быть проведена с помощью неравенства о среднем арифметическом и среднем геометрическом. Однако, более общим методом является использование производной, а именно, если нам надо найти наибольшее и наименьшее значение непрерывной функции одной переменной, то мы с помощью производной находим экстремумы этой функции, а затем сравниваем их со значениями функции на границе данного множества. Аналогичным образом исследуются функции нескольких переменных, при этом необходимое условие экстремума ($f' = 0$) записывается для каждой переменной. Большая сложность этих задач в случае нескольких переменных заключается в том, что граница области здесь состоит не из отдельных точек, а представляет собой линию или поверхность.

Следует прорешать задачи на экстремум и на наибольшие / наименьшие значения функций из разных разделов науки: геометрические (например, найти наименьшее значение площади полной поверхности цилиндра при заданном объёме), физические, алгебраические (наименьшее значение суммы квадратов корней уравнения), тригонометрические и т.д.

Тема 10.2. Использование монотонности функции

Известная теорема о связи производной с монотонностью функции успешно применяется для решения вопроса о разрешимости уравнения или неравенства, а также для их решения. Кроме того, монотонность функции $f(x)$ гарантирует, что уравнение $f(x) = a$ имеет не более одного корня, а значит, если корень найден, скажем, подбором, то это единственный корень. Иногда, в случае, когда функция $f(x)$ не монотонна, удобно разбить её область определения на участки монотонности и исследовать уравнение на каждом из участков в отдельности (пример: уравнение $x^4(x - 2) = 81$).

Производная успешно применяется также для доказательства неравенств (например, $e^x \geq x + 1$). Неравенство Коши о среднем геометрическом и среднем арифметическом

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$$

также может быть доказано с помощью производной (индукцией по n).

Тема 10.3. Использование выпуклости функции

Выпуклость функции используется для решения задач более тонких. Например, выпуклость функции $f(x) = 3^x$ гарантирует, что уравнение $3^x = 2x + 1$ будет иметь не более двух корней; простым подбором получаем, что $x = 0$ или $x = 1$.

Тема 10.4. Использование интеграла для вычисления площадей и объёмов

Следует подчеркнуть, что интеграл является мощным средством для вычисления площадей плоских фигур, объёмов тел, площадей поверхностей, а также физических величин: масс, зарядов и т.д. В качестве примеров можно рассмотреть площадь параболического сегмента, площадь поверхности и объём тора, площадь поверхности шарового слоя, нахождение центра тяжести (центра масс) однородного полушара т.д.

11. Уравнения и неравенства с параметрами

Тема 11.1. Графики функций. Преобразование графиков. Множества на плоскости

Для того, чтобы школьники хорошо усвоили понятие действительной функции, следуют решить ряд задач на такие свойства функций, как чётность, нечётность, периодичность.. С задачами на суперпозицию функций, несмотря на их относительную простоту, школьники справляются плохо. Предполагается разобрать ряд задач этого типа и методы их решения. Далее, школьники часто путают обратную функцию $f^{-1}(x)$ с функцией $\frac{1}{f(x)}$. Следует

обсудить понятие обратной функции, решить ряд задач на нахождение явного вида (формулы) обратной функции, её графика. Предполагается обсудить методику решения задач такого типа: график какой функции получится, если график функции $y = 3^{x-1} + 5$ отразить симметрично относительно оси ординат, прямой $y = 3$, прямой $x = 2$, прямой $y = 4 - x$, прямой $y = x - 1$, повернуть кривую на 90° вокруг начала координат и т.д.?

Предлагается обсудить, как, зная график функции $y = f(x)$, построить графики функций $y = kf(x)$, $y = f(kx)$, $y = f(x) + A$, $y = f(x + a)$, $y = |f(x)|$, $y = f(|x|)$. Привести соответствующие примеры. Применить графики функций к решению уравнений и неравенств.

Весьма полезным является построение точечных множеств на плоскости, т.е. множеств точек, выделяемых каким-либо условием (как правило, это уравнение или неравенство).

Тема 11.2. Решение уравнений, неравенств и систем с параметрами

Уравнения, неравенства и системы с одним или несколькими параметрами – это задачи, на которых проверяется качество знания школьником всего математического материала, а также умение рассуждать логически. Для решения таких уравнений (неравенств или систем) используется весь арсенал математических методов решения обычных уравнений (неравенств или систем). Кроме того, большую эффективность имеют графические методы. А именно, пусть надо решить уравнение $f(x, a) = 0$. Существуют два подхода: а) рисуем графики функций $y = f(x, a)$ на плоскости Oxy (это будет семейство кривых); б) рисуем на плоскости Oxa множество точек, удовлетворяющих уравнению $f(x, a) = 0$.

Следует решать задачи с параметром с различными формулировками: при каких значениях параметра (параметров) уравнение (неравенство, система) имеет хотя бы одно решение, не имеет решений, имеет ровно одно решение, все решения удовлетворяют определённому неравенству или какому-либо другому условию, при каких значениях параметра (параметров) все точки определённого отрезка являются решениями данного неравенства? И т.д. Разнообразие формулировок полезно для развития у школьника навыка логических рассуждений.

Примерные темы докладов и рефератов

1. Области на плоскости, задаваемые уравнениями и неравенствами.
2. Решение уравнений и неравенств с параметром с помощью областей на плоскости.
3. Линейное программирование.
4. Китайская теорема об остатках.
5. Бинарные отношения и предикаты.
6. Векторное произведение векторов.
7. Проективная плоскость.
8. Косоугольная система координат.
9. Аффинные преобразования плоскости.
10. Симметрические многочлены.
11. Дифференциальные уравнения.
12. p -адические числа.

13. Комплексные числа и кватернионы.
14. Диофантовы уравнения.
15. Геометрия Лобачевского.
16. Теорема Эйлера о многогранниках.
17. Трёхгранные углы и сферическая геометрия.
18. Кривые второго порядка.
19. Мощность множества.
20. Решение логических уравнений.
21. Машина Тьюринга
22. Сложность алгоритмов.
23. Три кризиса развития математики.
24. Антиномии теории множеств.
25. Алгебраические операции.
26. Бином Ньютона. Полиномиальная формула.

III. ОРГАНИЗАЦИОННО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЕ УСЛОВИЯ РЕАЛИЗАЦИИ ПРОГРАММЫ

Материально-техническое обеспечение

Учебные аудитории для проведения лекционных занятий, практических (семинарских) занятий, укомплектованные специализированной учебной мебелью и техническими средствами обучения, служащими для представления информации большой аудитории.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся, оснащенные компьютерной техникой с возможностью подключения к сети Интернет.

Учебно-методическое обеспечение для самостоятельной работы

Перечень ресурсов сети «Интернет»

1. ОРОКС – <http://orioks.miet.ru/oroks-miet/srs.shtml>
2. ЭБС издательства Лань - <http://e.lanbook.com/>
3. Научная электронная библиотека eLIBRARY.RU - <http://elibrary.ru/>
4. <http://ru.wikipedia.org> – определения, теоремы, исторические сведения
5. <http://techlibrary.ru> – книги по математике, физике и другим дисциплинам
6. <http://www.mathnet.ru/> – общероссийский математический портал
7. <http://emirs.miet.ru/oroks-miet>

Перечень учебной литературы

1. Александров А.Д., Вернер А.Л., Рыжик В.И. Стереометрия. Висагинас, ALFA, 1998.
2. Бардушкин В.В., Кожухов И.Б., Прокофьев А.А. Делимость чисел и решение уравнений в целых числах, 160 с. РИО МИЭТ, 1999.

3. Верещагин Н.К., Шень А. Начала теории множеств, 128 с. М., МЦНМО, 1999.
4. Вернер А.Л. Геометрия, 8 класс. М., “Просвещение”, 2001.
5. Виленкин Н.Я. Рассказы о множествах, 152 с. М., МЦНМО, 2007.
6. Виленкин Н.Я., Ивашёв-Мусатов О.С., Шварцбурд С.И. Алгебра и математический анализ: 10 класс: Учебник для углубленного изучения математики в общеобразовательных учреждениях Изд.12-е, испр./13-е, стереотип.
7. Виленкин Н.Я., Ивашёв-Мусатов О.С., Шварцбурд С.И. Алгебра и математический анализ: 11 класс: Учебник для углубленного изучения математики в общеобразовательных учреждениях Изд.12-е, испр./13-е, стереотип.
8. Гусев В.А., Кожухов И.Б., Прокофьев А.А. Геометрия. Полный справочник, 320 с. М., Махаон, 2006.
9. Калинин А.Ю., Терёшин Д.А. Стереометрия 10. М., Физматкнига, 2007.
10. Кожухов И.Б., Прокофьев А.А. Математика. Полный справочник, 352 с. М., Махаон, 2005.
11. Кожухов И.Б., Прокофьев А.А. Математика. Готовимся без репетитора. Задачи и решения, 304 с. М., Махаон, 2006.
12. Мордкович А.Г., Алимов Ш.А., Колмогоров А.Н. Алгебра и начала анализа. Учебник.
13. Прокофьев А.А., Шабунин М.И. Математика. Алгебра. Начала математического анализа. Профильный уровень, 424 с. М., “Бином”, 2007.
14. Ткачук В.В. Математика – абитуриенту. М., МЦНМО, 2010.
15. Френкель А.А., Бар-Хиллел И. Основания теории множеств, 552 с. М., КомКнига, 2006.
16. Канель-Белов А.Я., Ковальджи А.К. Как решать нестандартные задачи. М., МЦНМО, 1997.
17. Агаханов Н.Х., Подлипский О.К. Математические олимпиады Московской области. М., Изд-во МФТИ, 2003.
18. Гальперин Г.А., Толпыго А.К. Московские математические олимпиады. М., Просвещение, 1986.
19. Берлов С.Л., Иванов С.Б., Кохась К.Л. Петербургские математические олимпиады. СПб-М-Краснодар, 2003.
20. Четвёртая Соросовская олимпиада школьников 1997-1998. М., МЦНМО, 1998.
21. Пойя Д. Как решать задачу?
22. Пойя Д. Математические задачи Стэнфордского университета.

IV. ФОРМЫ АТТЕСТАЦИИ И ОЦЕНОЧНЫЕ ЗАДАНИЯ

Оценка качества освоения программы

Оценка качества освоения программы осуществляется аттестационной комиссией по результатам посещаемости курса, выполнения контрольных работ, защиты рефератов и успешной сдачи зачета.

Слушатель считается аттестованным, если он посетил более 75 % занятий и выполнил все контрольные задания на положительную отметку (решил правильно более 60 % заданий контрольной работы, защитил реферат).

Входное тестирование учителей математики перед началом курсов повышения квалификации по программе «Задачи по математике для кружковой работы и подготовки к олимпиадам» (образец)

1. Число A больше числа B на 20%. На сколько процентов B меньше, чем A ?
2. Решить неравенство $\frac{1}{x} \geq 5$.
3. Стороны треугольника ABC равны 3, 4 и 6. Точка M – точка пересечения медиан треугольника. Вычислить площадь треугольника AMB .
4. Найти произведение всех натуральных делителей числа 2^{10} .
5. В классе 24 ученика. Из них 18 собирают марки, 10 – монеты, 3 человека не собирают ни марки, ни монеты. Сколько учеников собирают марки и монеты?
6. При каких a неравенство $ax^2 + 2a < x$ не имеет решений?
7. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = x^2$ и $y = 6 - x$.
8. $f(x) = \sqrt{u^2(x) + v^2(x)}$, $u(3) = 3$, $v(3) = -4$, $u'(3) = 1$, $v'(3) = -2$. Найти $f'(3)$.
9. Найти угол φ , если $630^\circ < \varphi < 810^\circ$ и $\sin \varphi = 0,5$.
10. Решить неравенство $x^5 \geq 3x^{-1}$.

Выходное тестирование учителей математики перед началом курсов повышения квалификации по программе «Задачи по математике для кружковой работы и подготовки к олимпиадам» (образец)

1. Пусть $f(x)$ – функция, обратная функции $\varphi(x) = 2x - |x - 3|$. Вычислить $f(1)$.
2. Решить неравенство $\arcsin x \leq \arccos 2x$.
3. Найти площадь фигуры, задаваемой неравенством $|x| + |x - 2y| \leq 5$.
4. При каких x наибольшее из чисел $2x - 1$, $x + 2$ не превосходит 3?
5. Решить уравнение $2^x + \log_3(x + 7) = 6$.
6. Клиент положил некоторую сумму денег под определённый процент годовых. Через два года сумма составила 7260 руб., а ещё через год 7986 руб. Какую сумму клиент положил в банк?
7. Составить уравнение общей касательной к кривым $y = x^2$ и $y = x^2 - x$.
8. Вычислить $\operatorname{tg}\left(\arcsin \frac{1}{3} - \operatorname{arccotg} 2\right)$.
9. Все рёбра треугольной призмы равны a . Найти расстояние между скрещивающимися диагоналями двух боковых граней призмы.
10. Имеет ли уравнение $x^2 - y^2 = 2008$ целочисленные решения?

Входное анкетирование
слушателя курсов повышения квалификации по программе
«Задачи по математике для кружковой работы и подготовки к олимпиадам»

1. ФИО _____
2. Год рождения _____
3. Образование _____
4. Стаж работы _____
5. Специальность _____
6. Год окончания учебного заведения _____
7. Посещение курсов повышения квалификации, год _____
8. Квалификационная категория. Разряд _____
9. Место работы, должность _____
10. Уровень Ваших профессиональных знаний (дайте Ваше определение)

11. Какими учебниками и учебными пособиями Вы пользуетесь

12. Ваш опыт работы? В чем заключается его содержание?
1) *личный, профессиональный* _____
2) *его уровень (информационный, практический, деятельно-продуктивный)*

13. С какими пособиями Вы знакомы? Что используете в своей работе?

14. Что побудило Вас прийти на курсы?
1) *требование администрации*
2) *необходимость в получении документа*
3) *необходимость приобретения знаний, практических умений в организации работы*
4) *другое*
15. Составьте перечень вопросов, на которые хотите получить ответы на курсах

16. По каким вопросам Вам требуется консультация? _____

С какой тематикой Вы хотели бы подробнее ознакомиться? _____

17. Что Вы ожидаете получить от курсов?
1) *я буду знать* _____
2) *буду уметь* _____
3) *применять в учебном процессе* _____

«Задачи по математике для кружковой работы и подготовки к олимпиадам»

7. Ваши предложения по проведению курсов? _____

**Справка о кадровом составе
преподавателей, участвующих в реализации
программы дополнительного профессионального образования**

№ п/п	ФИО	Занимаемая должность	Ученая степень	Контакты	
				телефон	e-mail
1	Ревякин Александр Михайлович	Доцент	кандидат физико-математических наук	+79055807705	arevyakin@mail.ru
2.	Бардушкин Владимир Валентинович	Профессор	доктор физико-математических наук	+79175876602	bardushkin@mail.ru
3	Кожухов Игорь Борисович	Профессор	доктор физико-математических наук	+79167155502	kozuhov_i_b@mail.ru
4.	Терещенко Анатолий Михайлович	Профессор	доктор технических наук	+79164443655	4443655@mail.ru

Составители программы

Кожухов И.Б. *доктор физико-математических наук, профессор;*
Ревякин А.М. *кандидат физико-математических наук, доцент.*