МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Национальный исследовательский технологический университет «МИСиС»
Институт базового образования

КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ

УТВЕРЖДАЮ:

Проректор по дополнительному образованию

_____________ В.Л. Петров

«1» декабря 2020 г.

СОГЛАСОВАНО:

Начальник Учебно-методического управления

_____________ А.А. Волков

«1» декабря 2020 г.

ПРИНЯТА:

на заседании Ученого совета ИБО

_____________ Н.Л.Подвойская

«1» декабря 2020 г.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ ПРОГРАММА
(повышение квалификации)

Решение отдельных заданий повышенного и высокого уровней сложности с развернутым ответом ЕГЭ по математике

Направление: предметное содержание математики в общеобразовательной школе

Уровень: продвинутый

Авторы курса:

Закиров Ансар Анварович,
доцент кафедры математики

Плужникова Елена Леонидовна, старший преподаватель кафедры математики

Флорова Ирина Анатольевна, старший преподаватель кафедры математики

Москва, 2020

Раздел 1. Характеристика программы

Цель реализации программы - совершенствование профессиональных компетенций слушателей в области решения отдельных заданий повышенного и высокого уровней сложности с развернутым ответом ЕГЭ по математике.

1.1. Совершенствуемые компетенции

№ п/п	Компетенции	Направление подготовки 44.03.01 Педагогическое образование
		Бакалавриат
		Код компетенции
1.	Способен осуществлять педагогическую деятельность на основе специальных научных знаний.	ОПК-8

1.2. Планируемые результаты обучения

№ п/п	Знать – уметь	Направление подготовки 44.03.01 Педагогическое образование
		Бакалавриат
		Код компетенции
1.	**Знать:** -способы решения уравнений, неравенств, систем уравнений и неравенств с параметрами, относящихся к заданиям высокого уровня сложности ЕГЭ по математике; -способы решения заданий повышенного уровня сложности экономического содержания, задач на оптимальный выбор с построением математических моделей; -способы решения заданий по стереометрии повышенного уровня сложности ЕГЭ по математике; -основные понятия аналитической геометрии в пространстве. **Уметь:** -решать задания с параметрами, соответствующие заданиям с развернутым ответом высокого уровня сложности ЕГЭ по математике; -применять элементы векторной алгебры и аналитической геометрии при доказательстве утверждений и при решении заданий по стереометрии с	ОПК-8

	развернутым ответом повышенного уровня сложности ЕГЭ по математике; -строить и исследовать математические модели при решении задач экономического содержания, задач на оптимальный выбор, соответствующих заданиям с развернутым ответом повышенного уровня сложности ЕГЭ по математике, с результатом, соответствующим продвинутому уровню.	
2.	**Знать:** -критерии определения уровня сложности заданий по алгебре и геометрии; -методику составления дифференцированных по уровням сложности диагностических работ по темам алгебры и геометрии. **Уметь:** составлять и решать дифференцированные по уровням сложности диагностические работы по темам алгебры и геометрии.	ОПК-8

1.3 Категория обучающихся: уровень образования – высшее образование, область профессиональной деятельности – обучение математике на уровне среднего общего образования в общеобразовательной организации.

1.4 Форма обучения: очная.

1.5 Трудоемкость программы, режим занятий: всего 72 часа, в том числе 43 часа аудиторной работы, включая итоговую аттестацию, 29 часов самостоятельной работы слушателей.

Раздел 2 Содержание программы

2.1 Учебный (тематический) план

№ п/п	**Наименование разделов и тем**	**Аудиторные учебные занятия, учебные работы**			**Внеаудиторная работа**	**Формы контроля**	**Трудоемкость**
		Всего ауд. часов	Лекции	Практические занятия	С/р		
1	2	3	4	5	6	7	8
	Входное тестирование	**2**		**2**			**2**
1	**Раздел 1.**	**18**	**8**	**10**	**14**		**32**

	Решение уравнений, неравенств, систем уравнений и неравенств высокого уровня сложности с развернутым ответом						
1.1	Решение линейных и квадратных уравнений, содержащих параметры	4	2	2	2		6
1.2	Решение линейных и квадратных неравенств, содержащих параметры	3	1	2	4	к.р. №1	7
1.3	Решение уравнений и неравенств с параметрами с применением графического подхода	4	2	2	2	к.р. №2	6
1.4	Решение уравнений с параметрами, содержащих неизвестную под знаком абсолютной величины	4	2	2	2	к.р. №3	6
1.5	Решение неравенств с параметрами, содержащих неизвестную под знаком абсолютной величины	3	1	2	4	к.р. №4	7
	Раздел 2. Решение заданий по стереометрии повышенного уровня сложности с развернутым ответом	**12**	**4**	**8**	**8**		**20**
2.1	Решение задач нахождения углов между прямыми, между прямой и плоскостью, между плоскостями с применением координатного метода	6	2	4	4	к.р. №5	10
2.2	Решение задач нахождения	6	2	4	4	к.р. №6	10

	расстояний от точки до прямой, от точки до плоскости, расстояний между прямыми, между прямой и плоскостью, между плоскостями с применением координатного метода						
	Раздел 3. Задания экономического содержания и на оптимальный выбор	**6**	**3**	**3**	**3**		**9**
3.1	Решение задач экономического содержания, задач на оптимальный выбор, относящихся к заданиям повышенного уровня сложности с развернутым ответом	6	3	3	3		9
	Раздел 4. Диагностические работы	**3**	**2**	**1**	**4**		**7**
4.1	Составление дифференцированных по уровню сложности диагностических работ по темам алгебры и геометрии	3	2	1	4	Проект	7
	Итоговая аттестация	**2**		**2**		Выходное тестирование **Зачет**	**2**
	Итого	**43**	**17**	**26**	**29**		**72**

2.2 Учебная программа

№ п/п	**Виды учебных занятий**	**Содержание**
1	2	3
Входное тестирование	Практическое занятие, 2 часа	Решение отдельных задач повышенного и высокого уровней сложности на образовательном портале «Решу ЕГЭ» https://math-ege.sdamgia.ru/

Раздел 1. Решение уравнений, неравенств, систем уравнений и неравенств высокого уровня сложности с развернутым ответом		
Тема 1.1. Решение линейных и квадратных уравнений и систем уравнений, содержащих параметры	Лекция, 2 часа	Особенности заданий с параметрами. Уравнения с параметрами: линейные, квадратные, системы уравнений. Требования к оформлению решения заданий высокого уровня сложности с развернутым ответом
	Практическое занятие, 2 часа	Цель: формирование умения решать задания с параметрами, соответствующие заданиям с развернутым ответом высокого уровня сложности ЕГЭ по математике. Работа в малых группах: решение линейных и квадратных уравнений, систем уравнений с параметрами, относящихся к заданиям высокого уровня сложности. Решение заданий из открытого банка ЕГЭ.
	Самостоятельная работа, 2 часа	Совершенствование навыков решения линейных и квадратных уравнений и систем уравнений с параметрами, относящихся к заданиям высокого уровня сложности.
Тема 1.2 Решение линейных и квадратных неравенств, систем неравенств, содержащих параметры	Лекция, 1 час	Особенности решения неравенств с параметрами. Линейные, квадратные неравенства, системы неравенств с параметрами
	Практическое занятие, 2 часа	Цель: формирование умения решать задания с параметрами, соответствующие заданиям с развернутым ответом высокого уровня сложности ЕГЭ по математике. Работа в малых группах: решение линейных, квадратных неравенств, систем неравенств с параметрами, относящихся к заданиям высокого уровня сложности. Решение заданий из открытого банка ЕГЭ.
	Самостоятельная работа, 4 часа	Совершенствование навыков решения линейных, квадратных, систем неравенств с параметрами, относящихся к заданиям высокого уровня сложности. Контрольная работа №1 по темам 1.1 и 1.2
Тема 1.3 Решение уравнений и неравенств с параметрами с применением графического подхода	Лекция, 2 часа	Графический подход к решению заданий с параметрами. Системы координат *xOy, xOa*. Графическое решение уравнений и неравенств с параметрами
	Практическое занятие, 2 часа	Цель: формирование умения решать задания с параметрами, соответствующие заданиям с развернутым ответом высокого уровня сложности ЕГЭ по математике. Работа в малых группах по 2 человека:

		графическое решение уравнений и неравенств с параметрами, относящихся к заданиям высокого уровня сложности Решение заданий из открытого банка ЕГЭ.
	Самостоятельная работа, 2 часа	Отработка навыков графического решения уравнений и неравенств с параметрами, относящихся к заданиям высокого уровня сложности. Контрольная работа №2 по теме 1.3.
Тема 1.4 Решение уравнений с параметрами, содержащих неизвестную под знаком абсолютной величины	Лекция, 2 часа	Особенности решения заданий, содержащих неизвестную под знаком абсолютной величины. Уравнения с параметрами, содержащие неизвестную под знаком абсолютной величины
	Практическое занятие, 2 часа	Цель: формирование умения решать задания с параметрами, соответствующие заданиям с развернутым ответом высокого уровня сложности ЕГЭ по математике. Работа в малых группах: аналитическое и графическое решение уравнений с параметрами, содержащих неизвестную под знаком абсолютной величины и относящихся к заданиям высокого уровня сложности. Решение заданий из открытого банка ЕГЭ.
	Самостоятельная работа, 2 часа	Отработка навыков аналитического и графического решения уравнений с параметрами, содержащих неизвестную под знаком абсолютной величины и относящихся к заданиям высокого уровня сложности. Контрольная работа № 3 по теме 1.4.
Тема 1.5 Решение неравенств с параметрами, содержащих неизвестную под знаком абсолютной величины	Лекция, 1 час	Неравенства с параметрами, содержащие неизвестную под знаком абсолютной величины
	Практическое занятие, 2 часа	Цель: формирование умения решать задания с параметрами, соответствующие заданиям с развернутым ответом высокого уровня сложности ЕГЭ по математике. Работа в малых группах: аналитическое и графическое решение неравенств с параметрами, содержащих неизвестную под знаком абсолютной величины и относящихся к заданиям высокого уровня сложности. Решение заданий из открытого банка ЕГЭ.
	Самостоятельная работа, 4 часа	Отработка навыков аналитического и графического решения неравенств высокого уровня сложности с параметрами, содержащих неизвестную под знаком абсолютной величины Контрольная работа № 4 по теме 1.5

Раздел 2. Решение заданий по стереометрии повышенного уровня сложности с развернутым ответом		
Тема 2.1 Решение задач нахождения углов между прямыми, между прямой и плоскостью, между плоскостями с применением координатного метода	Лекция, 2 часа	Декартова прямоугольная система координат. Векторы в пространстве. Скалярное, векторное и смешанное произведение векторов. Уравнение плоскости, уравнения прямой в пространстве. Угол между двумя прямыми, между двумя плоскостями, между прямой и плоскостью. Требования к оформлению решения заданий повышенного уровня сложности с развернутым ответом
	Практическое занятие, 4 часа	Цель: формирование умения применять элементы векторной алгебры и аналитической геометрии при доказательстве утверждений и при решении заданий по стереометрии с развернутым ответом повышенного уровня сложности ЕГЭ по математике. Индивидуальная работа слушателя: решение задач повышенного уровня сложности на вычисление углов между двумя прямыми, между двумя плоскостями, между прямой и плоскостью координатным методом. Решение заданий из открытого банка ЕГЭ.
	Самостоятельная работа, 4 часа	Совершенствование навыков решения задач повышенного уровня сложности на вычисление углов между двумя прямыми, между двумя плоскостями, между прямой и плоскостью координатным методом. Контрольная работа № 5 по теме 2.1.
Тема 2.2 Решение задач нахождения расстояний от точки до прямой, от точки до плоскости, расстояний между прямыми, между прямой и плоскостью, между плоскостями с применением координатного метода	Лекция, 2 часа	Расстояние от точки до прямой, от точки до плоскости, между двумя прямыми, от прямой до плоскости, между двумя плоскостями
	Практическое занятие, 4 часа	Цель: формирование умения применять элементы векторной алгебры и аналитической геометрии при доказательстве утверждений и при решении заданий по стереометрии с развернутым ответом повышенного уровня сложности ЕГЭ по математике. Индивидуальная работа слушателя: решение задач повышенного уровня сложности на нахождение расстояний между пространственными объектами координатным методом Решение заданий из открытого банка ЕГЭ.
	Самостоятельная работа, 4 часа	Отработка навыков решения задач повышенного уровня сложности на нахождение расстояний между пространственными объектами координатным методом Контрольная работа № 6 по теме 2.2.

Раздел 3. Задания экономического содержания и на оптимальный выбор		
Тема 3.1 Решение задач экономического содержания, задач на оптимальный выбор, относящихся к заданиям повышенного уровня сложности с развернутым ответом	Лекция, 3 часа	Основные типы задач экономического содержания, задач на оптимальный выбор. Составление математической модели задачи, исследование составленной модели. Требования к оформлению решения заданий повышенного уровня сложности с развернутым ответом
	Практическое занятие, 3 часа	Цель: формирование умения строить и исследовать математические модели при решении задач экономического содержания, задач на оптимальный выбор, соответствующих заданиям с развернутым ответом повышенного уровня сложности ЕГЭ по математике, с результатом, соответствующим продвинутому уровню. Работа в малых группах по 2 человека: построение и исследование математической модели при решении задач экономического содержания, задач на оптимальный выбор, соответствующих заданиям с развернутым ответом повышенного уровня сложности ЕГЭ по математике Решение заданий из открытого банка ЕГЭ.
	Самостоятельная работа, 3 часа	Отработка навыков решения задач экономического содержания, задач на оптимальный выбор, соответствующих заданиям с развернутым ответом повышенного уровня сложности ЕГЭ по математике. Контрольная работа № 6 по теме 3.1.
Раздел 4. Диагностические работы		
Тема 4.1 Составление дифференцированных по уровню сложности диагностических работ по темам алгебры и геометрии	Лекция, 2 часа	Критерии определения уровня сложности заданий по математике. Методика составления дифференцированных по уровню сложности диагностических работ по алгебре и геометрии
	Практическое занятие, 1 час	Цель: формирование умения составлять и решать дифференцированные по уровням сложности диагностические работы по темам алгебры и геометрии. Работа в группах: определение уровня сложности заданий в соответствии с критериями, составление и решение дифференцированных по уровням сложности диагностических работ по темам разделов 1-3. Обсуждение вариантов решений и подходов. Совместное подведение итогов.
	Самостоятельная работа, 4 часа	Совершенствование навыков определение уровня сложности заданий в соответствии с критериями, составления и решения, дифференцированных по уровням сложности диагностических работ по темам разделов 1-3.

		Проект: составление дифференцированных по уровню сложности диагностических работ по алгебре и геометрии (по темам разделов 1-3)
Итоговая аттестация	2 часа	Выходное тестирование. Зачет по совокупности выполненных контрольных работ и проекта

Раздел 3. Формы аттестации и оценочные материалы

3.1 Форма текущего контроля – контрольные работы №№ 1-6 по темам разделов 1-3, проект № 1 «Диагностическая работа»

3.1.1. Входное тестирование

В ходе курса слушатели проходят входное тестирование, направленное на определение уровня сформированности компетенций ОПК-8, и выявление проблемных зон слушателей. Входное тестирование не подвергается оцениванию.

Варианты заданий входного тестирования

1. Решите уравнение:

$$\frac{(x-2)^2}{2}+\frac{18}{(x-2)^2}=7\left(\frac{x-2}{2}-\frac{3}{x-2}\right)+10.$$

Найдите его корни, принадлежащие отрезку [-2; 2].

2. Решите неравенство:

$$25x^2-4|8-5x|<80x-64.$$

3. Решить систему:

$$\begin{cases}\dfrac{5x-4y}{4}-1=2x+2\\ \dfrac{3x-2y}{3}+2=3x-2\end{cases}.$$

3.1.2. Варианты заданий контрольных работ и проекта

Варианты заданий контрольной работы № 1 с решениями

1. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{x-8}=3a-ax+2$ имеет единственное решение.

Решение

Сделаем замену переменных: $\sqrt{x-8}=t\,(t\geq 0)$. Тогда $x=t^2+8$ и данное уравнение примет вид

$$t=3a-a(t^2+8)+2;$$

$$at^2+t+5a-2=0.$$

Далее необходимо найти все значения параметра a, при которых полученное уравнение имеет единственное неотрицательное решение.

Возможны следующие случаи.

1) Если $a = 0$, то получим линейное уравнение, которое имеет единственное решение $t = 2$, а значит, исходное уравнение имеет единственное решение $x = 10$.

2) Если $a \neq 0$ и квадратное уравнение имеет два корня, один из которых неотрицательный, а второй отрицательный, то есть корни разных знаков. В этом случае должны выполняться следующие условия:

$$\begin{cases} D>0, \\ t_1t_2\leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1-4a(5a-2)>0, \\ \dfrac{5a-2}{a}\leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 20a^2-8a-1<0, \\ a\in(0;\dfrac{2}{5}] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a\in(-0,1;0,5), \\ a\in(0;0,4] \end{cases} \Rightarrow a\in(0;0,4].$$

Заметим, что при $a = 0{,}4$ получим два корня, $t_1 = 0$ и $t_2 = -5/2$, которые удовлетворяют условию задачи.

3) Если $a \neq 0$ и уравнение имеет одно неотрицательное решение. В этом случае должны выполняться следующие условия:

$$\begin{cases} D=0, \\ t\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-0,1; a=0,5, \\ \dfrac{-1}{2a}\geq 0 \end{cases} \Rightarrow a=-0,1.$$

Ответ: $a \in \{-0{,}1) \cup [0;\ 0{,}4]$.

2. При всех значениях параметра a решить неравенство $\sqrt{x+a}\geq x+1$.

Решение

Данное неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$\sqrt{x+a}\geq x+1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+a\geq 0, \\ x+1<0, \end{cases} \\ \begin{cases} x+1\geq 0, \\ x+a\geq (x+1)^2 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\geq -a, \\ x<-1, \end{cases} \\ \begin{cases} x\geq -1, \\ x^2+x-a+1\leq 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Очевидно, что первая система совокупности имеет решения, если $a > 1$. В этом случае $x \in [-a; -1)$.

Вторая система имеет решения, если второе неравенство этой системы имеет решения, принадлежащие интервалу [–1; +∞).

Решим неравенство

$x^2 + x - a + 1 \le 0$.

Так как коэффициент перед x^2 положительный, то ветви параболы направлены вверх, а значит, данное неравенство имеет решения, если дискриминант квадратного уравнения $x^2 + x - a + 1 = 0$ неотрицательный, то есть

$D = 1 - 4(1 - a) = 4a - 3 \ge 0 \Rightarrow a \ge 3/4$,

Тогда решением неравенства будет интервал $\left[\frac{-1-\sqrt{4a-3}}{2};\frac{-1+\sqrt{4a-3}}{2}\right]$.

Рассмотрим 2 случая.

1) Пусть $a \in [3/4; 1]$. Тогда первая система совокупности не имеет решений. Вопрос о решении второй системы сводится к исследованию расположения числа – 1 относительно отрезка $\left[\frac{-1-\sqrt{4a-3}}{2};\frac{-1+\sqrt{4a-3}}{2}\right]$.

Так как $3/4 \le a \le 1$, то $0 \le 4a - 3 \le 1$, тогда $-1 \le \frac{-1-\sqrt{4a-3}}{2}$, и решением совокупности будет отрезок $\left[\frac{-1-\sqrt{4a-3}}{2};\frac{-1+\sqrt{4a-3}}{2}\right]$.

2) Пусть $a > 1$, тогда $\frac{-1-\sqrt{4a-3}}{2} < -1 < \frac{-1+\sqrt{4a-3}}{2}$, и решением второй системы будет отрезок $\left[-1;\frac{-1+\sqrt{4a-3}}{2}\right]$. Решением первой системы будет интервал $[-a; -1)$.Значит, в этом случае решением неравенства будет отрезок $\left[-a;\frac{-1+\sqrt{4a-3}}{2}\right]$.

Ответ: $\left\{\begin{array}{l} x \in \left[\frac{-1-\sqrt{4a-3}}{2};\frac{-1+\sqrt{4a-3}}{2}\right], \text{если } a \in [3/4;1], \\ x \in \left[-a;\frac{-1+\sqrt{4a-3}}{2}\right], \text{если } a \in (1;+\infty), \\ \varnothing, \text{если } a \in (-\infty;3/4). \end{array}\right.$

Варианты заданий для контрольной работы № 2 с решениями

1. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $\sqrt{x^4-2x^2\sqrt{x^2}+x^2}+1-x^2+a-ax^2=0$ имеет ровно четыре решения.

Решение

Заметим, что при $x=\pm1$ исходное уравнение превращается в истинное тождество, а значит, $x=\pm1$ является решением данного уравнения при любом значении параметра a.

Выразим из уравнения параметр a:

$$a=\frac{\sqrt{x^4-2x^2\sqrt{x^2}+x^2}+1-x^2}{x^2-1}.$$

Далее найдем те значения параметра a, при которых полученное уравнение имеет ровно два решения.

Упростим полученное выражение;

$$\frac{\sqrt{x^4-2x^2\sqrt{x^2}+x^2}+1-x^2}{x^2-1}=\frac{\sqrt{x^4-2x^2|x|+x^2}+1-x^2}{x^2-1}=\frac{\sqrt{x^2(x^2-2|x|+1}+1-x^2}{x^2-1}=$$

$$=\frac{\sqrt{x^2(|x|-1)^2}-(x^2-1)}{x^2-1}=\frac{|x|\,\big||x|-1\big|}{x^2-1}-1.$$

Так функция $f(x)=\dfrac{|x|\,\big||x|-1\big|}{x^2-1}-1$ – четная, то ее график симметричен относительно оси OY. Поэтому построим график данной функции на интервале $[0; +\infty)$, а затем отобразим его симметрично на интервал $(-\infty; 0)$.

Заметим, что прямая $x = 1$ – вертикальная асимптота. Тогда при $x \geq 0$ и $x \neq 1$ имеем $f(x)=\dfrac{x|x-1|}{x^2-1}-1=\begin{cases}\dfrac{x(x-1)}{x^2-1}-1, x\in(1;+\infty);\\ -\dfrac{x(x-1)}{x^2-1}-1, x\in(0;1)\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{x}{x+1}-1, x\in(1;+\infty);\\ -\dfrac{x}{x+1}-1, x\in(0;1)\end{cases}=\begin{cases}-\dfrac{1}{x+1}, x\in(1;+\infty);\\ \dfrac{1}{x+1}-2, x\in(0;1).\end{cases}$

Значение функции при $x = 0$ равно $f(0) = -1$. Строим график (рис.3.1.):

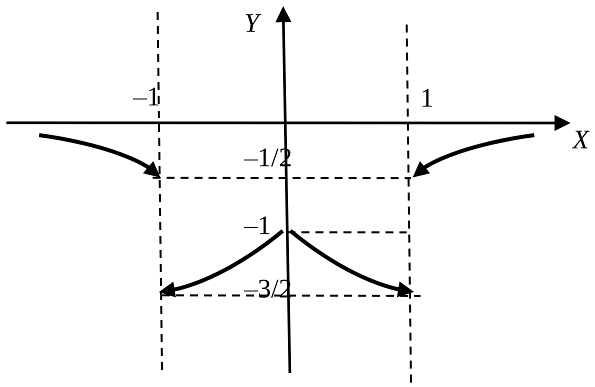


рис. 3.1.

График функции $y_1 = a$, при каждом значении параметра a, представляет собой прямую, параллельную оси OX. Тогда число решений уравнения $\frac{|x|\left||x|-1\right|}{x^2-1}-1=a$ совпадает с числом пересечений графиков $y_1 = a$ и $y=\frac{|x|\left||x|-1\right|}{x^2-1}-1$.

Анализируя графики на рисунке 3.1, получаем, что уравнение $\frac{|x|\left||x|-1\right|}{x^2-1}-1=a$ имеет ровно два различных решения, если $a \in (-1{,}5; -1) \cup (-0{,}5; 0)$. Тогда при этих значениях параметра a уравнение $\sqrt{x^4-2x^2\sqrt{x^2}+x^2}+1-x^2+a-ax^2=0$ имеет четыре решения.

Ответ: $a \in (-1{,}5; -1) \cup (-0{,}5; 0)$.

Варианты заданий для контрольной работы № 3 с решениями

1. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $8|ax-1|=9ax^2+16(3-a)x+8$ имеет единственное решение.

Решение

Преобразуем правую часть уравнения:

$$9ax^2+16(3-a)x+8=9ax^2+48x-16ax+8=9ax^2-9x+57x-16ax+16-8=$$

$$=9x(ax-1)+57x-16(ax-1)-8=(ax-1)(9x-16)+57x-8.$$

Тогда получим следующее уравнение:

$$8|ax-1|=(ax-1)(9x-16)+57x-8$$

Заметим, что при $a = 0$ уравнение имеет вид: $8 = 48x + 8$, а значит, оно имеет единственное решение $x = 0$.

Пусть $a \neq 0$, тогда, сделаем замену $ax - 1 = t$. Выразим x: $x = \frac{t+1}{a}$ и подставим его в уравнение:

$$8|t| = t\left(9\frac{t+1}{a} - 16\right) + 57\frac{t+1}{a} - 8.$$

Умножим правую и левую части уравнения на a:

$$8a|t| = t(9(t+1) - 16a) + 57(t+1) - 8a;$$

$$8a|t| + 8a + 16at = 9t^2 + 9t + 57t + 57.$$

Выразим из полученного уравнения a:

$$a = \frac{9t^2 + 9t + 57t + 57}{8|t| + 8 + 16t} = \frac{3}{8}\frac{3t^2 + 22t + 19}{|t| + 1 + 2t} = \frac{3}{8}\frac{(3t+19)(t+1)}{|t| + 1 + 2t}.$$

Построим график функции $y = \frac{3}{8}\frac{(3t+19)(t+1)}{|t| + 1 + 2t}$.

Раскроем модуль.

$$y = \begin{cases} \frac{3}{8}\frac{(3t+19)(t+1)}{1+3t}, t \geq 0; \\ \frac{3}{8}\frac{(3t+19)(t+1)}{1+t}, t < 0. \end{cases} \Rightarrow y = \begin{cases} \frac{3}{8}\frac{(3t+19)(t+1)}{1+3t}, t \geq 0; \\ \frac{3}{8}(3t+19), t < 0, t \neq -1. \end{cases}$$

Рассмотрим функцию

$$y = \frac{3}{8}\frac{(3t+19)(t+1)}{1+3t}, t \geq 0.$$

Найдем нули ее первой производной:

$$y' = \frac{3}{8}\frac{(6t+22)(3t+1) - 3(3t^2 + 22t + 19)}{(1+3t)^2} = 0.$$

Заметим, что при $t \geq 0$ знаменатель не обращается в ноль. Найдем нули числителя:

$$(6t+22)(3t+1) - 3(3t^2 + 22t + 19) = 18t^2 + 66t + 6t + 22 - 9t^2 - 66t - 57 = 0;$$

$$9t^2 + 6t - 35 = 0.$$

Корни квадратного уравнения: $t = -7/3$ (посторонний корень, так как $t \geq 0$) и $t = 5/3$.

Найдем знаки первой производной при $t \geq 0$ (рис.3.2).

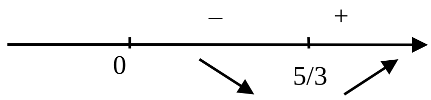


рис.3.2

Итак, функция убывает на интервале (0; 5/3), а возрастает на интервале (5/3; +∞).

Найдем значения функции в точке t = 5/3 и в точке t = 0:

y (5/3) = 4, y (0) = 57/8.

Получили, что точка (5/3; 4) – точка минимума функции.

При $t < 0$,график функции – прямая $y = \frac{3}{8}(3t + 19)$ с выколотой точкой (–1; 6). Построим график функции (рис.3.3).

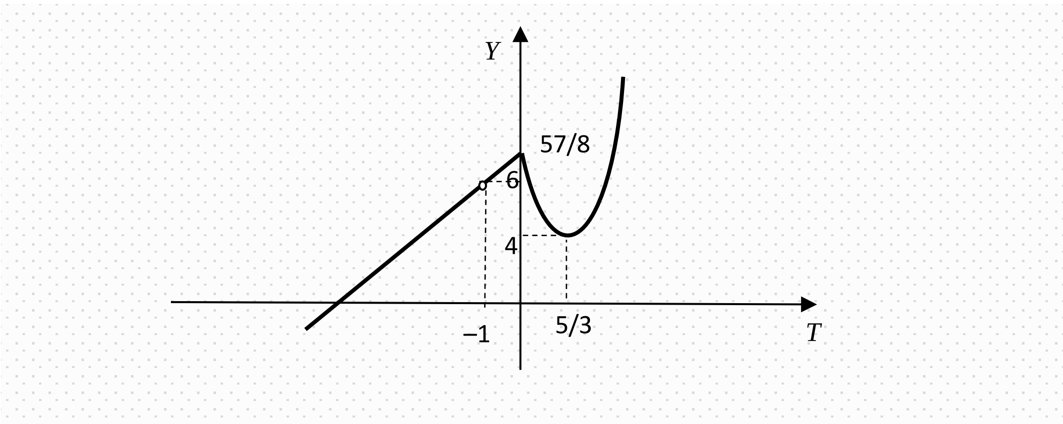


рис. 3.3.

График функции $y_1 = a$ $(a \neq 0)$, при каждом значении параметра a, представляет собой прямую, параллельную оси OT. Число решений уравнения совпадает с числом пересечений графиков $y_1 = a$ $(a \neq 0)$ и $y = \frac{3}{8}\frac{(3t+19)(t+1)}{|t| + 1 + 2t}$.

Анализируя графики на рисунке 3.3, получаем, что уравнение $a = \frac{3}{8}\frac{(3t+19)(t+1)}{|t| + 1 + 2t}$ имеет единственное решение, если

$a \in (-\infty; 0) \cup (0; 4) \cup (57/8; +\infty)$.

Тогда уравнение $8|ax - 1| = 9ax^2 + 16(3 - a)x + 8$ имеет единственное решение, если $a \in (-\infty; 4) \cup (57/8; +\infty)$.

Ответ: $a \in (-\infty; 4) \cup (57/8; +\infty)$.

Варианты заданий для контрольной работы № 4 без решений

1. Найти все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $x^2+2|x-a|\geq a^2$ справедливо для всех действительных x.

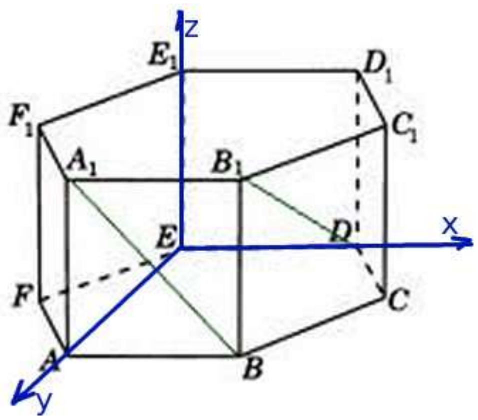
2. Найдите все значения параметра а, при которых решением неравенства $|3-4x|\sqrt{x-x^2}\geq(2ax+0,5-a)|3-4x|$ является отрезок длиной 0,5.

Варианты заданий для контрольной работы № 5

1. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AA_1 = 3$; $AD = 2$; $AB = 4$ и точка E – середина ребра BC. Найдите угол между прямыми B_1E и A_1C_1.

2. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найти косинус угла между прямыми BA_1 и DB_1.

Решение



$A_1\left(0;\sqrt{3};1\right)$ $B\left(1;\sqrt{3};0\right)$ $D\left(1;0;0\right)$ $B_1\left(1;\sqrt{3};1\right)$

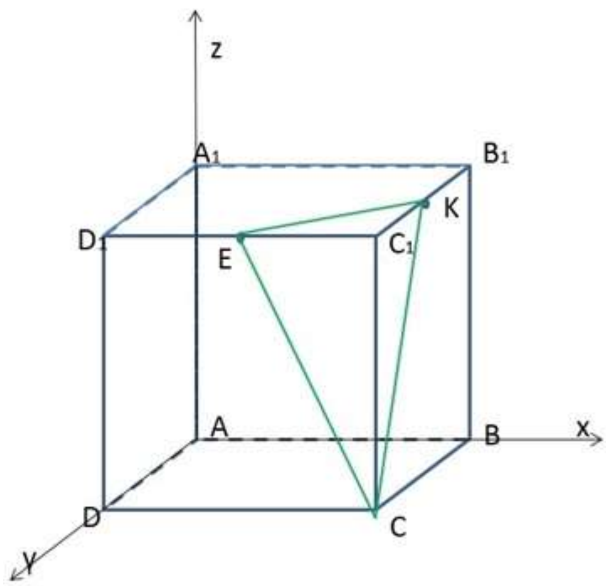
$\overrightarrow{A_1B}\,(1;0;-1)$ $\overrightarrow{B_1D}\left(0;-\sqrt{3};-1\right)$

$$\cos\beta = \left| \frac{1\times 0 + 0\times\left(-\sqrt{3}\right) + (-1)(-1)}{\sqrt{(-1)^2 + 0^2 + (-1)^2}\sqrt{0^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2}} \right| = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Варианты заданий для контрольной работы № 6

1. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 4. Найти расстояние от точки А до плоскости ЕКС, где Е – середина D_1C_1, К – середина C_1B_1.

Решение



A(0; 0; 0)   C(4; 4; 0)   E(4; 2; 4)   K(2; 4; 4)

Напишем уравнение плоскости ЕКС:

$$\begin{cases} 4A + 2B + 4C + D = 0 \\ 2A + 4B + 4C + D = 0 \\ 4A + 4B + D = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} A = 2 \\ B = 2 \\ C = 1 \\ D = -16 \end{cases}$$

Уравнение плоскости имеет вид: $2x + 2y + z - 16 = 0$

Расстояние от точки А до плоскости : $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

$$\mathbf{d} = \frac{|16|}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{16}{3} = 5\frac{1}{3}.$$

2. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, ребра которой равны 2. Точка E – середина ребра CC_1. Найдите расстояние между прямыми AB_1 и BE.

Варианты заданий к проекту

Базовый уровень

1. Решите уравнение:

$$18x^4 - 3x^3 - 25x^2 + 2x + 8 = 0$$

2. Решите неравенство:

$$\frac{2x^2-2x}{x^2-x+1} < \frac{2x^2-2x-2}{x^2-x-2} - 1$$

3. Решите уравнение:

$$|x^2+3x-20| = |x^2-3x+2|$$

4. Решите неравенство:

$$3|x+3| - 3x \leq 14 - |2-x|.$$

5. Решите уравнение:

$$\sqrt{2x-3} + \sqrt{4x+1} = 4$$

6. Решите неравенство:

$$\sqrt{x^2-x+2} > \sqrt{x+1}$$

7. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 6x^2 + 17xy + 7y^2 = a, \\ \log_{2x+y}(3x+7y) = 3. \end{cases}$$

8. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\sin 2x + \cos x}{\sqrt{y-1}} = 0, \\ y = 4\sin x + 3. \end{cases}$$

3.1.3. Выходное тестирование

В ходе завершения курса слушатели проходят выходное тестирование, направленное на определение уровня сформированности компетенций ОПК-8. Итоговый тест содержит 7 заданий, из них 5 заданий базового уровня и 2 задания продвинутого уровня. Выходное тестирование подвергается оцениванию.

Варианты тестовых заданий для выходного тестирования с решениями

1. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 3|x| + 2y = 1, \\ 2|x| - y = 3; \end{cases}$$

Решение:

Можно сделать замену $|x| = t$ и выйти на систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 3t + 2y = 1, \\ 2t - y = 3; \end{cases}$$

Приведем решение без замены.

Выражаем y из второго уравнения системы и **подставляем** в первое.

$$\begin{cases} 3|x| + 2(2|x| - 3) = 1, \\ y = 2|x| - 3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7|x| = 7, \\ y = 2|x| - 3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \pm 1, \\ y = 2 \cdot 1 - 3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \pm 1, \\ y = -1; \end{cases}$$

Ответ: $(1; -1), (-1; -1)$.

2. Решите уравнение:

$$18x^4 - 3x^3 - 25x^2 + 2x + 8 = 0$$

Решение:

$$18x^4-3x^3-25x^2+2x+8=0 \quad \Big| \div x^2 \neq 0$$

$18x^2-3x-25+\frac{2}{x}+\frac{8}{x^2}=0$, $18\left(x^2+\frac{\frac{4}{9}}{x^2}\right)-3\left(x-\frac{\frac{2}{3}}{x}\right)-25=0$,

$x-\frac{\frac{2}{3}}{x}=t,\ x^2+\frac{\frac{4}{9}}{x^2}=t^2+\frac{4}{3}$; $18t^2-3t-1=0$, $t_1=\frac{-1}{6},\ t_2=\frac{1}{3}$;

$x-\frac{\frac{2}{3}}{x}=\frac{-1}{6}$, $x-\frac{\frac{2}{3}}{x}=\frac{1}{3}$; $x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{97}}{12}$, $x_3=\frac{-2}{3},\ x_4=1$;

Ответ: $x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{97}}{12}$, $x_3=\frac{-2}{3},\ x_4=1$.

3. Решите неравенство:

$$\frac{2x^2-2x}{x^2-x+1}<\frac{2x^2-2x-2}{x^2-x-2}-1$$

Решение:

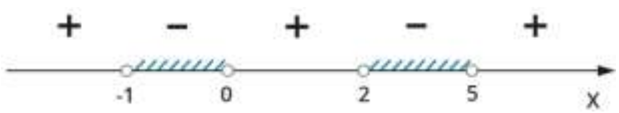
$$t=x^2-x$$

Тогда наше неравенство принимает вид:

$$\frac{2t}{t+1}<\frac{2t-2}{t-2}-1$$

Такое мы решать уже умеем:

$$\frac{2t^{\backslash t-2}}{t+1}-\frac{2(t-1)^{\backslash t+1}}{t-2}+1^{\backslash(t-2)(t+1)}<0 \Leftrightarrow$$
$$\frac{2t^2-4t-2t^2+2+t^2-t-2}{(t+1)(t-2)}<0 \Leftrightarrow$$
$$\frac{t^2-5t}{(t+1)(t-2)}<0 \Leftrightarrow$$
$$\frac{t(t-5)}{(t+1)(t-2)}<0$$



$t \in (-1;0) \cup (2;5)$

Не забываем вернуться к начальной переменной – x. Для этого нужно переписать полученное решение для t в виде неравенств:

$t \in (-1;0) \cup (2;5) \quad \Leftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} t > -1 \\ t < 0 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} t > 2 \\ t < 5 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x^2 - x > -1 \\ x^2 - x < 0 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x^2 - x > 2 \\ x^2 - x < 5 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x^2 - x + 1 > 0 \ - \text{ корней нет } \Rightarrow \text{ выполняется при всех x} \\ x^2 - x < 0 \ \Leftrightarrow \ x(x-1) < 0 \ \Leftrightarrow \ x \in (0;1) \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x^2 - x - 2 > 0 \ \Leftrightarrow \ (x-2)(x+1) > 0 \ \Leftrightarrow \ x \in (-\infty;-1) \cup (2;+\infty) \\ x^2 - x - 5 < 0 \ \Leftrightarrow \ \left(x - \frac{1-\sqrt{21}}{2}\right)\left(x - \frac{1+\sqrt{21}}{2}\right) < 0 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

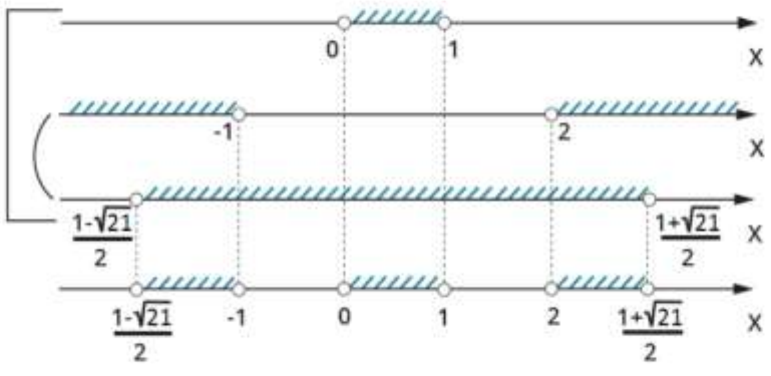
$$\left[\begin{array}{l} x \in (0;1) \\ \left\{\begin{array}{l} (x-2)(x+1) > 0 \ \Leftrightarrow \ x \in (-\infty;-1) \cup (2;+\infty) \\ \left(x - \dfrac{1-\sqrt{21}}{2}\right)\left(x - \dfrac{1+\sqrt{21}}{2}\right) < 0 \ \Leftrightarrow \ x \in \left(\dfrac{1-\sqrt{21}}{2}; \dfrac{1+\sqrt{21}}{2}\right) \end{array}\right. \end{array}\right.$$

$4 < \sqrt{21} < 5$
$-5 < -\sqrt{21} < -4$

$-4 < 1 - \sqrt{21} < -3$
$-2 < \dfrac{1-\sqrt{21}}{2} < -\dfrac{3}{2}$

$4 < \sqrt{21} < 5$
$5 < 1 + \sqrt{21} < 6$

$\dfrac{5}{2} < \dfrac{1+\sqrt{21}}{2} < 3$



$x \in \left(\dfrac{1-\sqrt{21}}{2}; -1\right) \cup (0;1) \cup \left(2; \dfrac{1+\sqrt{21}}{2}\right)$

3.1.4. Требования к выполнению контрольных работ

Контрольные работы выполняются слушателем на листах формата А4. Обязательным является наличие титульного листа. Контрольные работы по темам 1.1-1.5 включают 4 задания, соответствующие заданиям высокого уровня сложности ЕГЭ по математике. Контрольные работы по темам разделов 2-3 включают 4 задания, соответствующие заданиям повышенного уровня сложности ЕГЭ по математике. Решение заданий контрольной работы должно быть развернутым, т.е. полным и обоснованным. При необходимости слушатель может сопровождать аналитическое решение графическими комментариями (темы 1.1, 1.2, 1.4, 1.5). При решении заданий по темам раздела 2 необходимо приводить общую формулу применительно к конкретной задаче и только после этого производить вычисления.

3.1.5. Требования к выполнению проекта

Проект выполняется слушателем (группой численностью не более 5 слушателей) на листах формата А4. Обязательно наличие титульного листа. Выполнение проекта предусматривает составление двух вариантов диагностической работы, соответствующих двум уровням сложности. Каждый вариант должен содержать по два задания по каждой из тем разделов 1-3.

3.1.6. Критерии оценивания

- для оценки заданий выходного тестирования применяются критерии, аналогичные критериям оценки соответствующих заданий с развернутым ответом ЕГЭ по математике.

- для оценки заданий контрольных работ №№ 1-6 применяются критерии, аналогичные критериям оценки соответствующих заданий с развернутым ответом ЕГЭ по математике.

- проект

+	Оба варианта диагностической работы соответствуют критериям уровня сложности заданий	24 балла
+ / -	Имеются единичные несоответствия критериям уровня сложности заданий в одном варианте	20 баллов
- / +	Имеются единичные несоответствия критериям уровня сложности заданий в двух вариантах	16 баллов
-	Имеются многочисленные несоответствия критериям уровня сложности заданий	12 баллов

3.1.7. Оценивание

Итоговый тест зачитывается, если:

а) верно выполнено не менее 3-х заданий базового уровня и 1-го задания продвинутого уровня;

б) верно выполнено 5 заданий базового уровня;

в) верно выполнено не менее 2-х заданий базового уровня и 2-х заданий продвинутого уровня.

Каждый номер контрольных работ №№ 1-3 оценивается 0, 1, 2, 3 или 4 баллами; контрольных работ №№ 4-5 – 0, 1 или 2 баллами; контрольной работы № 6 – 0, 1, 2 или 3 баллами. Таким образом, максимальная оценка за все контрольные работы составляет 76 баллов. Максимальный балл за проект – 24.

3.2 Форма итоговой аттестации

Форма итоговой аттестации – зачет как совокупность выполненных контрольных работ, проекта и зачтенного выходного тестирования. Предметная компетенция слушателя соответствует продвинутому уровню (умение выполнять (и конструировать) задания ГИА с результатом 75 – 84 баллов), если по результатам выполнения контрольных работ и проекта слушатель набрал не менее 75 баллов.

Раздел 4. Организационно-педагогические условия реализации программы

4.1 Учебно-методическое обеспечение и информационное обеспечение программы

4.1.1 Основная литература:

1. Высоцкий И.Р., Кукса Е.А., Семенов А.В., Трепалин А.С., Ященко И.В. Математика. Решение заданий повышенного и высокого уровня сложности. Как получить максимальный балл на ЕГЭ: учебное пособие. – М.: Интеллект-Центр, 2015.

2. Высоцкий И.Р., Семенов А.В., Ященко И.В. Репетиционные варианты. Единый государственный экзамен 2015. Математика: учебное пособие. – Москва: Интеллект-Центр, 2015.

3. Гордин Р.К. ЕГЭ 2017. Математика. Геометрия. Стереометрия. Задача 14 (профильный уровень). Москва: МЦНМО, 2017. — 119 с.

4. ЕГЭ Математика. Типовые экзаменационные задания. В 2 ч. : часть 2 : 15 вариантов профильного уровня / А.В. Семенов, И.В. Ященко, И.Р. Высоцкий, А.С. Трепалин, Е.А. Кукса. Под редакцией И.В. Ященко. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний (Редакция «Поколение V»), 2018. – 96 с. : ил.

5. Ерина Т.М., ЕГЭ 2019. 100 баллов. Математика. Профильный уровень. Практическое руководство / Т.М. Ерина. – Издательство «Экзамен», 2019. – 350 с.

6. Киселев А.П. Геометрия: Планиметрия. Стереометрия. Москва: Ленанд, 2018 - 360с.

7. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. Учебник для общеобразовательных организаций (базовый и углубленный уровни). В 2 ч. Ч. 2 / [А.Г. Мордкович и др.] – 5-е изд., перераб. – М.: Мнемозина, 2017. – 264 с.: ил.

8. Математика. ЕГЭ. Задача с экономическим содержанием: учебно-методическое пособие / Под ред. Ф.Ф. Лысенко и С.Ю. Кулабухова. – Изд. 2-е, перераб. и доп. – Ростов н/Д: Легион, 2016. – 96 с. – (ЕГЭ).

9. Мордкович А.Г. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. Учебник для общеобразовательных организаций (базовый и углубленный уровни). В 2 ч. Ч. 1 / А.Г. Мордкович, П.В. Семенов. – 5-е изд., перераб. – М. : Мнемозина, 2017. – 319 с.: ил.

4.1.2 Дополнительная литература:

10. Асмолов А.Г. Формирование универсальных учебных действий в основной школе: от действия к мысли: пособие для учителя. – М.: Просвещение, 2011.

1. Виленкин Н.Я., Шибасов Л.П. За страницами учебника математики. Арифметика, алгебра, геометрия: книга для учащихся 10–11 классов. – М.: Просвещение, 2010.

2. Виленкин Н.Я. Алгебра и математический анализ для 10–11 классов: учебное пособие для учащихся классов и школ с углубленным изучением математики. – М.: Просвещение, 2010.

3. Высоцкий В.С. Задачи с параметром при подготовке к ЕГЭ. М.: Научный мир, 2011. – 316 с: 262 ил.

4. Никольский С.М., Потапов М.К., Решетников Н.Н., Шевкин А.В. Алгебра и начала математического анализа: учебник для 10, 11 классов. – М.: Просвещение, 2008.

5. Захаров П.И., Семенов А.В., Трепалин А.С., Ященко И.В. Оптимальный банк заданий для подготовки к ЕГЭ. Единый государственный экзамен 2015. Математика: учебное пособие. – М.: Интеллект-Центр, 2015.

4.2. Материально-технические условия реализации программы

Для проведения очных занятий и итоговой аттестации используются учебные аудитории с меловой или маркерной доской, а также компьютерный класс с возможностью выхода в Интернет.

Интернет-ресурсы:

1. Образовательный портал «Решу ЕГЭ». – URL: https://math-ege.sdamgia.ru/ , дата обращения: 20.11.2020

2. URL: https://alexlarin.net/ , дата обращения: 20.11.2020

3. Открытый банк заданий ЕГЭ/Математика. Профильный уровень. – URL: http://ege.fipi.ru/os11/xmodules/qprint/index.php?proj=AC437B34557F88EA4115D2F374B0A07B, дата обращения: 20.11.2020